

Leseprobe

Martin Nitschke

Geometrie

Anwendungsbezogene Grundlagen und Beispiele für Ingenieure

ISBN (Buch): 978-3-446-44143-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-44173-6

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44143-9>

sowie im Buchhandel.

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Anknüpfung an die Schulgeometrie</b>	<b>10</b>
1.1	Dreiecke, Vierecke, Vielecke . . . . .	10
1.2	Kongruenz, Ähnlichkeit, Strahlensätze . . . . .	17
1.3	Umfangs- und Flächeninhaltsberechnungen . . . . .	24
1.4	Einige Sätze über Dreiecke und Winkel . . . . .	33
1.5	Körper . . . . .	40
1.5.1	Quader, Zylinder, Prismen . . . . .	41
1.5.2	Pyramiden und Kegel . . . . .	43
1.5.3	Rotations- und Translationsflächen und -körper . . . . .	44
1.5.4	Allgemeinere Körper . . . . .	49
1.5.5	Polyeder . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Matrizen, Vektoren, Koordinaten</b>	<b>54</b>
2.1	Grundlagen aus der Linearen Algebra . . . . .	54
2.2	Länge und Winkel . . . . .	62
2.3	Orthogonale Zerlegung von Vektoren . . . . .	66
2.4	Koordinatensysteme und -transformationen . . . . .	68
2.4.1	Kartesische Koordinaten . . . . .	68
2.4.2	Krummlinige Koordinaten . . . . .	73
2.5	Determinante, Kreuzprodukt, Orientierung . . . . .	84
2.5.1	Determinante (2d) . . . . .	84
2.5.2	Kreuzprodukt und Determinante (3d) . . . . .	88
2.6	Lineare Transformationen und homogene Koordinaten . . . . .	93
2.6.1	Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen . . . . .	93
2.6.2	Homogene Koordinaten . . . . .	103

<b>3</b>	<b>Kurven, Flächen, Körper</b>	<b>106</b>
3.1	Kurven . . . . .	106
3.1.1	Parameterdarstellungen und Kurvenlängen . . . . .	106
3.1.2	Gleichungsdarstellungen ebener Kurven . . . . .	114
3.1.3	Funktionskurven . . . . .	118
3.1.4	Kegelschnitte (Kurven zweiter Ordnung) . . . . .	118
3.2	Flächen und Körper . . . . .	122
3.2.1	Parameterdarstellungen, Flächeninhalte, Volumina . . . . .	122
3.2.2	Gleichungsdarstellungen . . . . .	129
3.2.3	Flächen zweiter Ordnung . . . . .	129
3.3	Abstände und Schnitte . . . . .	132
3.3.1	Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche . . . . .	132
3.3.2	Abstände von Kurven und Flächen untereinander . . . . .	135
3.3.3	Schnitte . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Projektionen und Grundaufgaben der darstellenden Geometrie</b>	<b>146</b>
4.1	Projektionen . . . . .	146
4.2	Grundaufgaben . . . . .	150
4.3	Begriffe und Beispiele zu ausgewählten Projektionen . . . . .	150
4.3.1	Kotierte Projektion . . . . .	150
4.3.2	Orthogonale Zweitafelprojektion . . . . .	153
4.3.3	Umkloppung und wahre Gestalt ebener Figuren . . . . .	155
4.3.4	Axonometrie . . . . .	157
	<b>Lösungen in Kurzform</b>	<b>162</b>
	<b>Verzeichnisse</b>	<b>171</b>
	Literatur und Internet . . . . .	171
	Personen . . . . .	174
	MATLAB-Programme . . . . .	175
	<b>Index</b>	<b>176</b>

# Vorwort

In so gut wie allen technischen Studiengängen hat die Geometrie ihren Platz; sei es als eigenes Fach, als Teil des Mathematikurses oder versteckt in anderen Lehrveranstaltungen. Daran ändert auch die zunehmende Leistungsfähigkeit und Verfügbarkeit ausgefeilter CAD-Systeme nichts; CAD ist kein Ersatz, sondern häufig ein Werkzeug und manchmal eine Weiterentwicklung der klassischen Geometrie. Ähnlich wie in den Grundschulen weiterhin das Schreiben mit der Hand unterrichtet wird (obwohl es Textverarbeitungsprogramme gibt), ist die Geometrie Bestandteil jeder Ingenieurausbildung. Der souveräne Umgang mit CAD setzt ein umfangreiches geometrisches Grundwissen voraus. Da dieses nur bei wenigen Studienanfängern vorhanden ist, beginnt die vorliegende Studienhilfe mit einer Auffrischung (bzw. Einführung) einiger Zusammenhänge aus der Schulgeometrie. Danach werden als wesentliches Hilfsmittel zur analytischen Beschreibung Vektoren und Matrizen eingeführt. Damit und mit etwas Analysis lassen sich Kurven, Flächen und Körper darstellen sowie Bogenlängen, Flächeninhalte, Volumina, Abstände und Schnitte berechnen. Abschließend werden einige Grundaufgaben und Projektionen der darstellenden Geometrie behandelt.

Das Buch kann in der vorgegebenen Reihenfolge durchgearbeitet werden. In vielen Fällen wird zum Verständnis ein Zurückblättern erforderlich sein; auf die entsprechende Stelle wird dann durch eine Formel-, Satz-, Bild- oder Aufgabennummer verwiesen. Literatur- und Internethinweise auf tiefer gehende und/oder weiterführende Betrachtungen sind in eckige Klammern [ ] gesetzt und im Literatur- und Internetverzeichnis spezifiziert. Die vorliegende zweite Auflage enthält neben Korrekturen insbesondere ein aktualisiertes Internetverzeichnis. Alle zitierten Webseiten wurden mit dem Dienst WebCite® archiviert, so dass diese zeitlich unbegrenzt auch bei nachträglichen Änderungen und Löschungen in der Fassung von Mai 2014 abgerufen werden können.

Bei der Erstellung des Buches wurden das Satzsystem  $\text{\LaTeX}^1$  und das mathematische Softwaresystem MATLAB<sup>2</sup> eingesetzt. Sämtliche Bilder wurden mit MATLAB erstellt; die Quelltexte sind im Internet verfügbar. Für Beispiele mit geographischem Bezug wurde zur Darstellung der Kontinentkonturen das frei verfügbare, weltumspannende digitale Höhenmodell [tbase.bin WWW] benutzt.

Diese Studienhilfe basiert auf meinen Lehrveranstaltungen an der Hochschule Neubrandenburg. Nicht zuletzt durch die konstruktive Kritik der

---

<sup>1</sup>Näheres zu  $\text{\LaTeX}$  unter [DANTE WWW].

<sup>2</sup>MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

Studierenden konnte so manche Ungereimtheit beseitigt werden; herzlichen Dank dafür! Weitere Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis sind selbstverständlich willkommen; meine E-Mail-Adresse und zusätzliche Informationen zum Buch finden Sie auf der Internetseite GEOMETRIE.HS-NB.DE. Ich danke KATI BLAUDZUN und ANDREAS WEHRENPENNIG für die mühevollen Arbeit des Korrekturlesens, Frau FRITZSCH für die angenehme und aufmerksame Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Herrn ENGELMANN für die Aufnahme in diese Reihe und viele fachliche Hinweise.

Neubrandenburg, im Mai 2014

Martin Nitschke

## Symbole und Schriftarten

- 👉 **An diesen Stellen** ist der Leser eingeladen, zum Stift zu greifen und eine Aufgabe zu lösen. Aufgaben sind grundsätzlich in unmittelbarer Nähe zur Behandlung des jeweiligen Stoffes eingefügt. Dies ermöglicht eine sofortige Verständnisüberprüfung. Am Ende des Buches sind die Lösungen der Aufgaben in Kurzform zusammengestellt; eine ausführlichere Fassung steht auf GEOMETRIE.HS-NB.DE.
- Französische Anführungszeichen markieren mit MATLAB programmierte Beispiele. MATLAB-Schlüsselwörter wie **function** sind fett gedruckt, die Namen vordefinierter Funktionen, wie zum Beispiel **sin**, zusätzlich unterstrichen. Funktionen aus der Symbolic Math Toolbox wie syms sind doppelt unterstrichen. Kommentare werden durch ein %-Zeichen eingeleitet und sind hier in Grau gesetzt. Antworten des MATLAB-Systems sind durch Schreibmaschinenschrift hervorgehoben. Die vollständige MATLAB-Dokumentation, also insbesondere die Beschreibung der vordefinierten Funktionen, ist sowohl in das MATLAB-System integriert als auch über [MATLAB helpdesk WWW] zugänglich. Eine gute Einführung in MATLAB und eine Übersicht über frei verfügbare Software zur Linearen Algebra sind auf [GRAMLICH WWW] zu finden. In den Programm-Beispielen dieser Studienhilfe werden MATLAB-Kenntnisse etwa im Umfang der [GRAMLICH WWW]-Einführung vorausgesetzt. Die MATLAB-Beispiele sollen die Umsetzung des Gelernten in Computerprogramme unterstützen; MATLAB- oder andere EDV-Kenntnisse sind jedoch keine Voraussetzung für das Verständnis dieses Buches. Weiteres zu MATLAB und ähnlichen Produkten ist in Abschnitt 2.1 zu finden.
- 👉 Das MATLAB-Logo und eine kleinere Schrift verweisen auf die MATLAB-Datei, die zum jeweiligen Bild oder Programm-Listing gehört. Der unter GEOMETRIE.HS-NB.DE abrufbare Quelltext ermöglicht Lesern mit MATLAB-Zugang, das Bild bzw. Programm zu reproduzieren und/oder für den jeweiligen Zweck (Konstruktionsvorlage, Vortragsfolie usw.) zu modifizieren.

(D1) Der Betrag der Determinante ist das Volumen des von  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannten Parallelepipedes:

$$|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (2.167)$$

(D2) Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  *rechtshändig* (also wie in Bild 2.28) orientiert, so ist die Determinante positiv; sonst negativ.

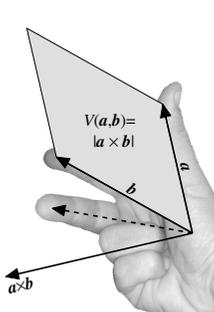


Bild 2.27:  
Kreuzprodukt  
◆ Kreuzprodukt.m

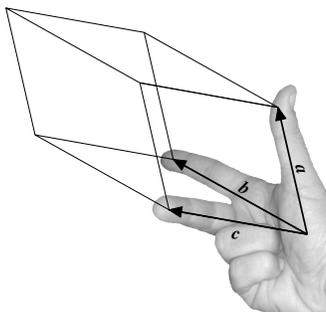


Bild 2.28: Determinante (3d)  
◆ det3d.m

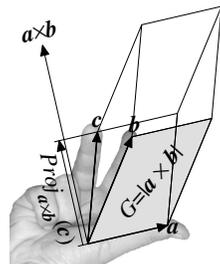


Bild 2.29: Volumen  
des Parallelepipedes  
◆ Parallelepiped.m

Da ein Parallelepiped ein spezielles Prisma ist, ist sein Volumen durch die Formel (1.104) gegeben. Ist die Grundfläche das von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Parallelogramm, so definiert nach (K2) das Kreuzprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  eine zur Grundfläche senkrechte Richtung, und die Höhe des Parallelepipedes ist die Länge der Projektion von  $\mathbf{c}$  auf  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Nach (K1) ist der Inhalt der Grundfläche gleich  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ . Insgesamt gilt also

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{(1.104) \text{ und Bild 2.29}}{=} \overset{\text{Grundfläche}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \overset{\text{Höhe}}{|Proj_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})|} \quad (2.168)$$

$$\stackrel{(2.55)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c})| \quad (2.169)$$

$$\stackrel{(2.32)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \underbrace{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0|}_{=1} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c}| \stackrel{(2.32)}{=} \left| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c}) \right| \quad (2.170)$$

$$\stackrel{(2.19)}{=} \left| (|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0) \cdot \mathbf{c} \right| \stackrel{(2.12)}{=} \left| (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \right|. \quad (2.171)$$

Sind wie in Bild 2.29 die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  rechtshändig orientiert, so spannen  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  einen spitzen Winkel auf, und das Skalarprodukt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

ist nach Satz 2.2 positiv. Entsprechend ergeben sich bei nicht rechtshändiger Orientierung ein stumpfer Winkel und ein negatives Skalarprodukt. Deshalb folgt aus (D1), (D2) und (2.171)

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}; \quad (2.172)$$

die Determinante von drei 3d-Vektoren lässt sich also auf die Berechnung von Skalar- und Kreuzprodukt zurückführen. Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix ist als die Determinante ihrer Spaltenvektoren definiert:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}. \quad (2.173)$$

» Die für  $2 \times 2$ -Matrizen bereits behandelte MATLAB-Anweisung **det(A)** steht für beliebige  $n \times n$ -Matrizen, also auch für  $3 \times 3$ -Matrizen, zur Verfügung. Bei Determinanten von drei dreidimensionalen Spaltenvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ist — wie im Zweidimensionalen — zunächst eine Matrix zu bilden und dann die Determinante zu berechnen: **det([a,b,c])**.

Die Berechnung der Determinante dreier Vektoren mittels Koordinaten wird in (2.201) behandelt. Ohne zu rechnen, ergeben sich aus geometrischen Überlegungen die folgenden Eigenschaften von Kreuz- und Spatprodukt:

Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2$  dreidimensionale Spaltenvektoren und  $\lambda$  ein Skalar, so gilt:

### 1. Antikommutativgesetze

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (2.174)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}). \quad (2.175)$$

### 2. Kommutativgesetz für zyklische Vertauschung

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \det(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2.176)$$

### 3. Linearitätsgesetze

#### a) Additivitätsgesetze

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}, \quad (2.177)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2. \quad (2.178)$$

$$\det(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (2.179)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}), \quad (2.180)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2). \quad (2.181)$$

b) **Skalare Multiplikativitätsgesetze**

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \tag{2.182}$$

$$\det(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c}) = \lambda \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.183}$$

4. a) **Parallelitätskriterium:**  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind genau dann **parallel**, wenn  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$  ist. Insbesondere ist

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}. \tag{2.184}$$

b) **Komplanaritätskriterium:**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind genau dann **komplanar**, d.h. in einer Ebene liegend, wenn  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$  ist; insbesondere

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0. \tag{2.185}$$

5. Für die Koordinateneinheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  aus (2.62) gilt

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \tag{2.186} \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \tag{2.189}$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \tag{2.187} \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \tag{2.190}$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \tag{2.188} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \tag{2.191}$$

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \tag{2.192}$$

$$\det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -1. \tag{2.193}$$

Aus diesen Eigenschaften folgen nun Formeln für die Berechnung des Kreuzprodukts und der Determinante mittels Koordinaten. Für beliebige dreidimensionale Spaltenvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{(2.63)}{=} (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \tag{2.194}$$

$$\stackrel{(2.177), (2.178)}{=} a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$$

$$+ a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$$

$$\stackrel{(2.184)}{=} + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \tag{2.195}$$

$$\stackrel{(2.186)-(2.191)}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

$$\tag{2.196}$$

$$\stackrel{(2.63)}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\tag{2.197}$$

Durch eine etwas längere Rechnung folgt daraus der **Entwicklungssatz von Hermann Günter Grassmann (1809–1877)**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \tag{2.198}$$

Für die Determinante gilt nun  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{(2.172),(2.197)}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}$

$$\stackrel{(2.4)}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 \quad (2.199)$$

$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \quad (2.200)$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 . \quad (2.201)$$

Auf PIERRE FRÉDÉRIC SARRUS (1798–1861) geht die folgende Merkmregel für (2.201) zurück:

Man schreibe die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  spaltenweise nebeneinander und füge

rechts daneben noch einmal die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  an:  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ .

Die Determinante ist dann die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links oben nach rechts unten vermindert um die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links unten nach rechts oben.

### Beispiel 2.5

Es ist  $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$  zu berechnen.

*Lösung:* Das Schema  $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  ergibt  $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-5) \cdot (-9) - (-9) + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-5) \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot (-1) - (-9) \cdot 2 \cdot 4 = 360$ . ■

Eine Anwendung der Determinanten ist die folgende, zum Beispiel in [FISCHER 2002] bewiesene, auf GABRIEL CRAMER (1704–1752) zurückgehende Regel.

### Satz 2.7 (Cramersche Regel)

Sind  $\mathbf{A}$  eine  $2 \times 2$ - bzw.  $3 \times 3$ -Matrix,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  sowie ggf.  $\mathbf{a}_3$  die Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  ein weiterer  $2 \times 1$ - bzw.  $3 \times 1$ -Vektor, und ist das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  eindeutig lösbar,

$$\text{so ist } x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}$$

$$\text{bzw. } x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_3 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}.$$

*Bemerkung:* Die CRAMERSche Regel gilt allgemeiner für eindeutig lösbare, lineare  $n \times n$ -Gleichungssysteme. Während sie bei  $2 \times 2$ - und  $3 \times 3$ -Systemen ein

praktisches Verfahren für die manuelle Rechnung liefert, ist sie zur numerischen Lösung größerer Systeme wegen des im Allgemeinen hohen Aufwandes nicht geeignet.

### 🔪 Aufgabe 2.15

Berechnen Sie die folgenden Kreuzprodukte und Determinanten:

1.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,
2.  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,
3.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ ,
4.  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,
5.  $\det \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1,2,3}$ .

## 2.6 Lineare Transformationen und homogene Koordinaten

### 2.6.1 Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen

Gegeben sind ein 2d-Vektor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  und ein Winkel  $\alpha$ ; gesucht ist der Vektor  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ , der durch Drehung von  $\mathbf{v}$  um den Winkel  $\alpha$  entsteht. Geeignete Koordinaten zur Lösung dieser Aufgabe sind die aus Abschnitt 2.4.2ff bekannten Polarkoordinaten. Nach (2.95) und (2.96) ist dann

$$\mathbf{v} = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (2.202)$$

und

$$\mathbf{w} \stackrel{\text{Bild 2.30}}{=} r \begin{pmatrix} \cos(t+\alpha) \\ \sin(t+\alpha) \end{pmatrix} \stackrel{\text{Additions- theore- me}}{=} r \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos t - \sin \alpha \sin t \\ \sin \alpha \cos t + \cos \alpha \sin t \end{pmatrix} \quad (2.203)$$

$$\stackrel{(2.202)}{=} \begin{pmatrix} (\cos \alpha)v_1 - (\sin \alpha)v_2 \\ (\sin \alpha)v_1 + (\cos \alpha)v_2 \end{pmatrix} \stackrel{(2.2)}{=} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{v}. \quad (2.204)$$

Es gilt also

### Satz 2.8

Ein 2d-Vektor wird um einen gegebenen Winkel  $\alpha$  gedreht, indem man ihn mit der so genannten **Drehmatrix**  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  von links multipliziert.

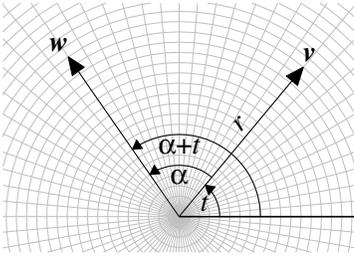


Bild 2.30: Drehung eines Vektors (2d) ◆ Drehung2d.m

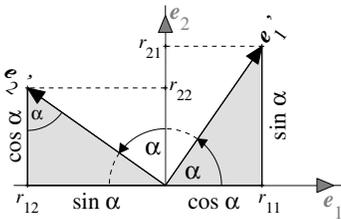


Bild 2.31: Drehmatrix und Richtungskosinus (2d) ◆ Drehmatrix2d.m

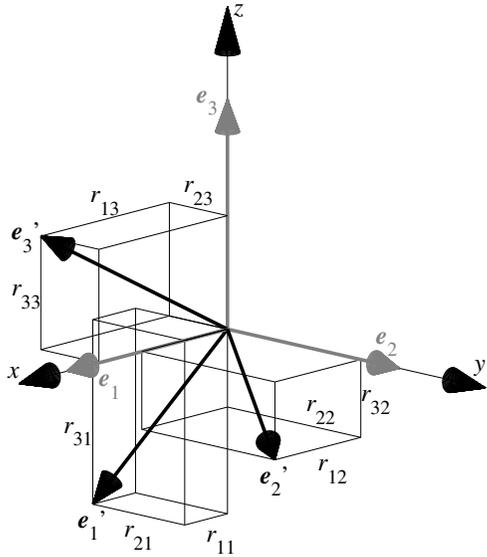


Bild 2.32: Drehmatrix und Richtungskosinus (3d) ◆ Drehmatrix3d.m

### 🔧 Aufgabe 2.16

1. Gegeben sei ein zweidimensionaler Spaltenvektor  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ . Wie lauten die Koordinaten des Vektors, den man erhält, wenn man  $v$ 
  - a) um  $45^\circ$ ,
  - b) um  $90^\circ$ ,
  - c) um  $180^\circ$
dreht?
  
2. Die aus der Definition (2.58) bekannten Koordinateneinheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  werden um einen gegebenen Winkel  $\alpha$  gedreht. Bestimmen Sie die Koordinaten der gedrehten Vektoren  $e'_1$  und  $e'_2$ .

Wie aus Aufgabe 2.16,2 hervorgeht, stehen in den Spalten der Drehmatrix die Vektoren, die durch Drehung der Koordinateneinheitsvektoren entstehen; vgl. insbesondere die Ergebnisse (L.5) und (L.6). Bezeichnen wir die Drehmatrix mit  $R$  und ihre Elemente mit  $r_{ij}$ , also

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \tag{2.205}$$

so ergibt sich aus Bild 2.31 und der Beziehung  $\pm \sin \alpha = \cos(90^\circ \mp \alpha)$

$$r_{11} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1), \quad (2.206) \qquad r_{12} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2), \quad (2.208)$$

$$r_{21} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1), \quad (2.207) \qquad r_{22} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2). \quad (2.209)$$

Die Elemente der Drehmatrix sind also die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren. Dieses Konzept lässt sich direkt auf drei und mehr Dimensionen übertragen: Eine Drehung wird durch eine Matrix beschrieben, die die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren enthält. So ist die 3d-Drehmatrix durch

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_3) \\ \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3) \\ \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_1) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_2) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_3) \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

definiert. Auch hier stehen in den Spalten der Drehmatrix die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_3$ . Die Kosinuswerte aus (2.206) bis (2.209) und (2.210) werden **Richtungskosinus** genannt. Analog zu Satz 2.8 gilt

### Satz 2.9

Ein 3d-Vektor wird gedreht, indem man ihn von links mit der Drehmatrix aus (2.210) multipliziert.

Da der zu drehende Vektor von links mit der Drehmatrix multipliziert wird, sind bei mehreren aufeinander folgenden Drehungen die entsprechenden Matrizen der Reihe nach *von rechts nach links* zu multiplizieren. Als Beispiel wird in Bild 2.33 zunächst um den Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse, danach um  $\theta$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $\psi$  um die  $z$ -Achse gedreht. Die daraus resultierende Gesamtdrehung erhält man durch Multiplikation der den Teildrehungen entsprechenden Matrizen in der in Bild 2.33 dargestellten Reihenfolge. Bei den Drehungen um die  $x$ -Achse steht in der ersten Spalte der Vektor  $\mathbf{e}_1$ , da dieser Koordinateneinheitsvektor unverändert bleibt. Entsprechend steht bei der Drehung um die  $z$ -Achse in der dritten Spalte der Vektor  $\mathbf{e}_3$ . Die anderen Elemente der Drehmatrix entsprechen denen der 2d-Drehmatrix aus Satz 2.8. Umgekehrt entdeckte EULER, dass jede 3d-Drehung durch drei Teildrehungen obiger Art zusammengesetzt werden kann<sup>1</sup>. Daher werden  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  als **Eulersche Winkel** bezeichnet. Die Achsenreihenfolge  $z - x - z$  hat gegenüber der vielleicht suggestiveren Folge  $x - y - z$  den Vorteil, dass sich die Transformation von der gedrehten Lage zurück in die Ausgangslage ohne großen Aufwand in derselben Form darstellen lässt: Mit den Bezeichnungen

<sup>1</sup>Ein Beweis steht zum Beispiel in [FISCHER 2001].

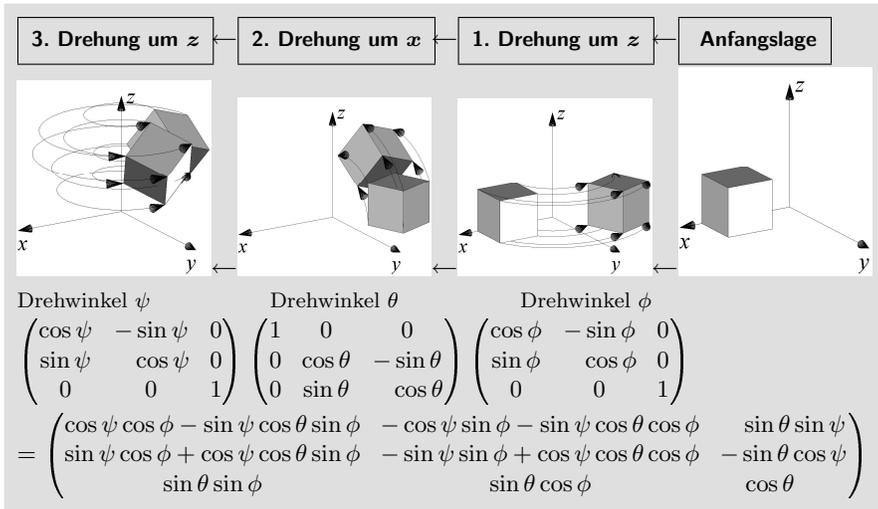


Bild 2.33: EULERSche Winkel

↖ Dreh3d.m

aus Bild 2.33 erhält man diese so genannte **inverse Drehung**, indem man zunächst um  $-\psi$  um die  $z$ -Achse dreht, danach um  $-\theta$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $-\phi$  um die  $z$ -Achse; die Reihenfolge ist also wieder  $z - x - z$ . Neben der hier angesprochenen Zerlegung einer Drehung durch Teildrehungen um  $z - x - z$  bzw.  $x - y - z$  gibt es viele andere Möglichkeiten, Drehungen zu beschreiben, zum Beispiel durch Angabe *einer* (im Allgemeinen mit keiner Koordinatenachse übereinstimmenden) Drehachse und *eines* Drehwinkels. Gebräuchliche Darstellungen und Transformationen zwischen diesen sind in [NITSCHKE, KNICKMEYER 2000] zusammengefasst.

**Beispiel 2.6**

Zu der durch  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{3} & \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$  definierten Drehung<sup>1</sup> sind die EULERSchen Winkel zu bestimmen.

*Lösung:* Wir vergleichen die Matrix  $\mathbf{R}$  mit der Darstellung aus Bild 2.33. Insbesondere gilt für die Elemente  $r_{32}$  und  $r_{31}$

$$(r_{32} =) \sin \theta \cos \phi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{31} =) \sin \theta \sin \phi = -\frac{1}{4}. \quad (2.211)$$

<sup>1</sup>Wir setzen hier voraus, dass  $\mathbf{R}$  eine Drehung beschreibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  und  $\det \mathbf{R} = 1$  ist; vgl. auch (2.218) und Satz 2.10.

Dies sind Polarkoordinaten mit  $r = \sin \theta$  und  $t = \phi$ . Also ist nach (2.97, 2.98) oder mit Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit  $x = r_{32}$ ,  $y = r_{31}$ ]

$$(r =) \sin \theta = \frac{1}{2}, \quad (2.212) \quad (t =) \phi = 210^\circ \text{ oder } -150^\circ. \quad (2.213)$$

Aus

$$(-r_{23} =) \sin \theta \cos \psi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{13} =) \sin \theta \sin \psi = \frac{1}{4} \quad (2.214)$$

folgt ähnlich [(2.100) mit  $x = -r_{23}$ ,  $y = r_{13}$ ]

$$(r =) \sin \theta = \frac{1}{2}, \quad (2.215) \quad (t =) \psi = 150^\circ. \quad (2.216)$$

Ferner ergibt sich aus  $(r_{33} =) \cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  und  $\sin \theta \stackrel{(2.212)}{=} \stackrel{(2.215)}{=} \frac{1}{2}$  wieder mit (2.97) und ggf. Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit  $x = r_{33}$ ,  $y = \sin \theta$ ] der noch fehlende EULER-Winkel  $\theta = 30^\circ$ . ■

### 🔗 Aufgabe 2.17 (Rotationsmatrix und Eulersche Winkel)

1. Der Vektor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  wird um  $90^\circ$  um die  $z$ -Achse, danach um  $135^\circ$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $210^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht. Berechnen Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors.
2. a) Berechnen Sie die Rotationsmatrix, die entsteht, wenn um  $60^\circ$  um die  $z$ -Achse, danach um  $30^\circ$  um die  $x$ -Achse und schließlich um  $45^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht wird.  
b) Ein Vektor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  wird wie eben beschrieben gedreht. Wie lauten die Koordinaten des gedrehten Vektors?

$$3. \text{ Berechnen Sie für die Matrix } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- a) die EULERSchen Winkel der durch  $\mathbf{R}$  definierten Drehung,
- b) die Determinante  $\det \mathbf{R}$ ,
- c) das Matrizenprodukt  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ .

Das Ergebnis von Aufgabe 2.17,3b ist  $\det \mathbf{R} = 1$ . Das ist kein Zufall. Der absolute Betrag der Determinante ist nach (D1) auf Seite 89 das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelepips. Beschreibt  $\mathbf{R}$  eine Drehung, so stehen in den Spalten von  $\mathbf{R}$  die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_3$ . Diese haben die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander; das von ihnen aufgespannte Parallelepiped ist also ein Würfel der Kantenlänge 1 und hat damit das Volumen 1; die Determinante ist also  $\pm 1$ . Da bei einer

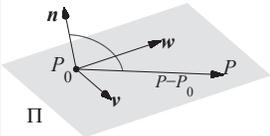
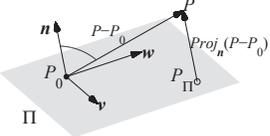
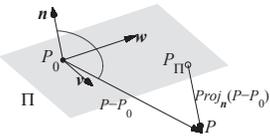
		
(a) $P$ auf $\Pi$	(b) $P$ auf der $\mathbf{n}$ zugewandten Seite von $\Pi$	(c) $P$ auf der $\mathbf{n}$ abgewandten Seite von $\Pi$
$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.102)$ bzw. $P \cdot \mathbf{n} = P_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (3.103)$	$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} > 0, \quad (3.104)$ bzw. $P \cdot \mathbf{n} > P_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (3.105)$	$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (3.106)$ bzw. $P \cdot \mathbf{n} < P_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (3.107)$
oder mit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, P_0 \cdot \mathbf{n} = d$ die vielleicht vertrautere Form		
$ax + by + cz = d, \quad (3.108)$	$ax + by + cz > d, \quad (3.109)$	$ax + by + cz < d. \quad (3.110)$
In allen drei Fällen ist		
$P_\Pi = P - (\mathbf{n}^0 \cdot (P - P_0))\mathbf{n}^0, \quad (3.111) \quad  \mathbf{n}^0 \cdot (P - P_0)  = d(P, \Pi). \quad (3.112)$		

Bild 3.24: HESSEsche Normalform einer Ebene im Raum

◆ Hesse3d.m

Ordnung in eine der Flächen (a) bis (n) aus Bild 3.25 überführen. Die ersten Fälle führen auf einen Punkt (a), eine Gerade (b), eine Ebene (c), zwei Ebenen [(d),(e)], Zylinder [(f) bis (h)] oder Kegel (i). Die Flächen (c) bis (i) sind eben oder lassen sich verzerrungsfrei auf eine Ebene abwickeln; man spricht daher von **abwickelbaren** Quadriken. Alle weiteren Fälle führen auf nicht abwickelbare Flächen; genauer auf Ellipsoide, Paraboloiden und Hyperboloide. Wird ein Ellipsoid (j) in Normallage parallel zu einer der Koordinatenebenen  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  oder  $(y, z)$  geschnitten, so entsteht eine Ellipse. Bei den Paraboloiden (k) und (l) führen die Schnitte parallel zur  $(x, z)$ - oder  $(y, z)$ -Ebene auf Parabeln, während die Schnitte parallel zur  $(x, y)$ -Ebene den Typ spezifizieren: Beim elliptischen Paraboloid (k) entstehen Ellipsen; beim hyperbolischen Paraboloid (l, insbesondere zweite Figur) Hyperbeln. Schnitte der Hyperboloide (m) und (n) parallel zur  $(x, z)$ - oder  $(y, z)$ -Ebene liefern stets Hyperbeln; zur  $(x, y)$ -Ebene parallele Schnitte produzieren dagegen Ellipsen. Bei den elliptischen Quadriken (f),(i),(j),(k) und den Hyperboloiden (m),(n) werden im Fall  $a = b$  die entsprechenden Schnittellipsen zu Kreisen, und die jeweilige Fläche zweiter Ordnung ist rotationssymmetrisch. Eine **Parameterdarstellung** kann in diesen Spezialfällen durch Rotation einer Strecke, Ellipse, Parabel oder Hyperbel gemäß (3.81) gewonnen werden. Beim Hyperboloid entscheidet dabei die Rotationsachse über den Typ der entstehenden Fläche: Rotiert eine wie in Bild 3.14(i) normal liegende Hyperbel um die

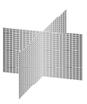
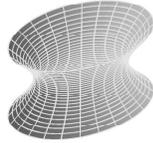
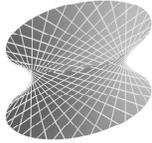
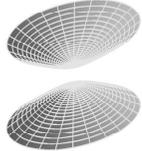
	(a) Punkt $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$	(3.113)			
	(b) Gerade $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	(3.114)			
abwickelbare Quadriken	(c) eine Ebene $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$	(3.115)			
	(d) zwei parallele Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$	(3.116)	(c)	(d)	
					
	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
	(e) zwei sich schneidende Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	(3.117)			
	(f) Elliptischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	(3.118)			
	(g) Parabolischer Zylinder $x^2 = 2py$	(3.119)			
	(h) Hyperbolischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	(3.120)			
	(i) Elliptischer Doppelkegel $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$	(3.121)			
	Paraboloide, Ellipsoid				
(j)		(k)	(l)		
(j) Ellipsoid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$		(3.122)			
(k) Elliptisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$		(3.123)			
(l) Hyperbolisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$	(3.124)				
Hyperboloide					
	(m)		(n)		
	(m) Einschaliges Hyperboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.125)			
(n) Zweischaliges Hyperboloid $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.126)				

Bild 3.25: Flächen zweiter Ordnung (Quadriken)

$y$ -Achse, so entsteht ein einschaliges Hyperboloid wie in (m); bei Rotation um die  $x$ -Achse ein zweischaliges wie in (n). Parameter- und Gleichungsdarstellungen für nicht rotationssymmetrische Ellipsoide, Hyperboloide sowie elliptische Paraboloid, Kegel und Zylinder erhält man durch Streckung und/oder Stauchung längs der Koordinatenachsen. Das hyperbolische Paraboloid ist die einzige nicht degenerierte Fläche zweiter Ordnung, die sich nicht durch Streckung/Stauchung einer Rotationsfläche darstellen lässt. Es kann jedoch ebenso wie das einschalige Hyperboloid aus zwei Scharen von Geraden erzeugt werden [(1, dritte Figur) und (m, zweite Figur)]. Deshalb finden sich Anwendungen des einschaligen Hyperboloides wie in Bild 3.19 dargestellt und des hyperbolischen Paraboloides bei Dachflächen (Haus der Kulturen der Welt, Berlin) und Übergangsflächen im Straßenbau. Mehr über Flächen zweiter Ordnung (Anwendungen, Parameterdarstellungen, ...) findet man in [GOTTWALD et al. 1995, BÄR 2001, GIERING, SEYBOLD 1987].

### 3.3 Abstände und Schnitte

#### 3.3.1 Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche

Sind  $A$  ein Punkt und  $y$  eine Kurve oder Fläche, so ist der **Abstand**  $d(A, y)$  definiert als der kürzeste Abstand zwischen  $A$  und einem auf  $y$  liegenden Punkt. Ist der Punkt, an dem dieser kürzeste Abstand angenommen wird, eindeutig bestimmt, so bezeichnen wir ihn hier mit  $A_y$ . Ist  $y = g$  eine Gerade  $g$ , so ist  $A_y = A_g$  der **Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $g$** . Ist  $g$  wie in Bild 3.1(b) durch  $P(t) = P_0 + tv$  parametrisiert, so hat  $A_g$  die Koordinaten

$$A_g \stackrel{\text{Bild 3.26}}{=} P_0 + \text{Proj}_{\mathbf{v}}(A - P_0) \stackrel{(2.55)}{=} P_0 + \mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T}(A - P_0). \quad (3.127)$$

Der **Abstand zwischen dem Punkt  $A$  und der Geraden  $g$**  ist daher

$$d(A, g) = d(A, A_g) \stackrel{(3.127)}{=} |A - P_0 - \mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T}(A - P_0)| \quad (3.128)$$

$$\stackrel{(2.36)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 + |\mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T}(A - P_0)|^2} \quad (3.129)$$

$$\stackrel{(2.14)}{=} \stackrel{(2.32)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 + (\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 |\mathbf{v}^0|^2} \quad (3.130)$$

$$\stackrel{|\mathbf{v}^0|=1}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - (\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2} \quad (3.131)$$

$$\stackrel{(2.165)}{=} V(\mathbf{v}^0, A - P_0) \stackrel{(2.162)}{=} |\mathbf{v}^0 \times (A - P_0)|. \quad (3.132)$$

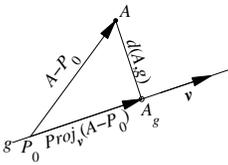


Bild 3.26: Abstand  
 Punkt  $A \leftrightarrow$   
 Gerade  $g \quad \blacktriangleleft dAg.m$

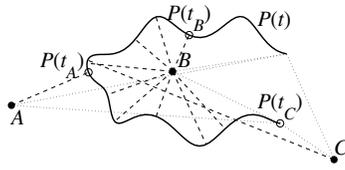


Bild 3.27: Abstand  
 Punkt  $A \leftrightarrow$  Kurve  $P(t) \quad \blacktriangleleft dAP.m$

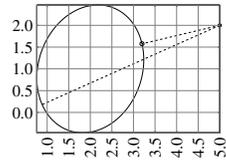


Bild 3.28: *Beispiel*  
 Abstand Punkt  $\leftrightarrow$   
 Ellipse  $\blacktriangleleft$  BspdAP.m

Etwas komplizierter ist die Situation für den (kürzesten) **Abstand zwischen einem Punkt  $A$  und einer parametrisierten Kurve  $P(t)$** : In Bild 3.27 wird der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt  $A$  und der Kurve  $P(t)$  im Punkt  $P(t_A)$  angenommen. Auch hier steht der Verbindungsvektor  $P(t_A) - A$  senkrecht auf der Kurve. Da die Kurvenrichtung durch  $P'(t_A)$  gegeben ist, gilt nach Satz 2.2

$$(A - P(t_A)) \cdot P'(t_A) = 0; \tag{3.133}$$

der Parameter  $t_A$  des  $A$  nächstgelegenen Kurvenpunktes ist also die Lösung dieser Gleichung. Die Lösung ist im Allgemeinen nicht eindeutig; im Extremfall kann es unendlich viele Lösungen geben ( $P(t)$  Kreis,  $A$  dessen Mittelpunkt). Weiter garantiert (3.133) nur, dass die Verbindung zwischen  $A$  und  $P(t_A)$  senkrecht auf der Kurve steht. Wie das Beispiel des Punktes  $B$  aus Bild 3.27 zeigt, kann es mehrere solcher Kurvenpunkte geben, von denen nur einer minimalen Abstand zu  $B$  hat. Das Beispiel des Punktes  $C$  zeigt schließlich, dass bei nicht geschlossenen Kurven der minimale Abstand auch an einem der Randpunkte angenommen werden kann, ohne dass dieser (3.133) erfüllt. *In allen Fällen wird der kürzeste Abstand zwischen Punkt und Kurve in einem der durch (3.133) definierten Punkte (in Bild 3.27 gestrichelt - - - markierte Abstände) oder in einem Randpunkt (in Bild 3.27 punktiert  $\cdots$  markierte Abstände) angenommen.*

**Beispiel 3.5**

**Gegeben** sind der Punkt  $A(5; 2)$  sowie eine gegenüber der Normalla-ge um  $70^\circ$  gedrehte und um  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  verschobene Ellipse mit den Halbachsen 1.5 und 1.2 (Bilder 3.3 und 3.28).

**Gesucht** ist der  $A$  nächstgelegene Ellipsenpunkt sowie dessen Abstand zu  $A$ .

*Lösung:* Da die Ellipse eine geschlossene Kurve ist, gibt es hier keine Randpunkte und der minimale Abstand wird an einem Ellipsenpunkt angenommen, der die Gleichung (3.133) erfüllt. Das von (3.18) ausgehende Aufstellen

# Index

- Abstand  
  Ellipse  $\leftrightarrow$  Ellipse 136, 138  
  EUKLIDischer 65, 66  
  Fläche  $\leftrightarrow$  Fläche 136  
  geodätischer 65, 66  
  Gerade  $\leftrightarrow$  Gerade 136  
  Kurve  $\leftrightarrow$  Fläche 136  
  Kurve  $\leftrightarrow$  Kurve 136  
  parallele Geraden 137  
  Punkt  $\leftrightarrow$  Ebene 130, 135  
  Punkt  $\leftrightarrow$  Ellipse 133  
  Punkt  $\leftrightarrow$  Fläche 135, 136  
  Punkt  $\leftrightarrow$  Gerade 117,  
    118, 132, 133, 135  
  Punkt  $\leftrightarrow$  Kurve 133  
  sphärischer 66, 83  
  windschiefe Geraden 136,  
    137
- abwickelbar 130, 131
- Addition und Subtraktion  
  von Matrizen 56
- Ähnlichkeit 17, 100
- Ähnlichkeitssätze 18
- allgemeine Lage 107, 116,  
  121, 129, 151, 152
- Altgrad 63, 64
- Ankreismittelpunkt 13
- Antennenausrichtung 111
- $\arctan_2$  76
- Astronavigation 144
- Asymptoten 121
- atan2** 76
- Außenwinkel 11
- Aufbauverfahren 157
- Aufpunkt 106, 122
- Aufriss 146
- Augenpunkt 146
- Axonometrie 147, 157, 160,  
  161
- Azimet 78, 111
- Bewegung 17
- Böschungswinkel 43, 118
- Bogenmaß 63, 64
- Breitengrad 78
- Breitenkreis 81
- Brennpunkt 120
- Brennstrahlen 121
- Brückenprofil 10
- Cart** 77
- cart2pol** 76, 78
- cart2sph** 79
- CAUCHY-SCHWARZsche  
  Ungleichung 63
- CAVALIERisches Prinzip 26,  
  42  
  für Kegel 42  
  für Zylinder 42
- cross** 88
- Dach 139  
  -ausmittlung 153  
  Parallelprojektionen 147  
  Axonometrie 160, 161  
  Dimetrie 160, 161  
  Isometrie 161  
  kotierte Projektion  
    152, 153  
  Trimetrie 161  
  Zweifafelprojektion 154
- rechnerisch 169
- Projektionen 149
- Typen 153
- wahre Gestalt der  
  Seitenflächen 156
- Zentralprojektionen 148,  
  149
- darstellende Geometrie 9,  
  146
- DEG** , degree 64
- det** 85, 90
- Determinanten 85, 90, 92,  
  98, 100  
  -Multiplikationssatz 102
- diag** 59
- Diagonalelement 59
- Diagonalmatrix 59  
  Veranschaulichung 100
- Differenzialgeometrie 15
- Dimetrie 148, 159–161
- DIN A... 22, 24
- Division einer Matrix  
  durch einen Skalar 58
- DMS** 64
- Doppelkegel 124, 131
- Doppelkreiskegel 124
- dot** 58
- Drachenviereck 14, 16, 19,  
  68
- Drehmatrix 93–95
- Drehspiegelung 98, 99
- Drehung 17, 93, 95, 99  
  inverse 96
- Dreibein 147
- Dreieck 10, 11  
  Ähnlichkeitssätze 18  
  Ankreise 13  
  Außenwinkel 11  
    -halbierende 13  
  Flächeninhalt 27, 29  
  gleichschenkliges 11  
  gleichseitiges 11  
  Höhe 12, 27  
  Höhenschnittpunkt 12,  
    162  
  Inkreis 12, 162  
  Innenwinkel 11  
  Klassifikation 11  
  Kongruenzsätze 18, 162  
    SsW und sSW 35  
  mit drei rechten Winkeln  
    13  
  Mittelsenkrechte 12  
  rechtwinkliges 11, 162  
  Schwerpunkt 12, 162  
  Seitenhalbierende 12  
  spitzwinkliges 11  
  stumpfwinkliges 11, 162  
  Umkreis 12, 162  
  Winkelhalbierende 12
- Dreiecksungleichung 61, 162
- $e_1, e_2, \dots$  69–71, 86, 91,  
  147
- Ebene 123, 130
- Einheitsmatrix 60
- Einheitsvektor 60
- Einschneideverfahren 157
- Elevation 78, 111
- Ellipse 118, 119  
  Flächeninhalt 127  
  Gleichungs-

- darstellung 115, 120  
 Parameterdarstellung  
   106, 107, 121  
 Umfang 114  
 Ellipsenbogen, Länge 114  
 Ellipsenfläche 123  
 Ellipsoid 127, 130, 131  
   Volumen 51, 128  
 Entwicklungssatz 91  
 Erdmessung 9  
 erstprojizierend 154  
 EUKLID  
   -ische Länge 65  
   -ische Norm 65  
   -ischer Abstand 65, 66  
   -ischer Vektorraum 65  
 EULERSche Winkel 95, 96  
 EULERScher Polyedersatz 52  
 Exzentrizität 121  
 Exzess 15  
**eye** 60  
  
 Fahrradrahmen 10  
 FALKSschema 57  
 Fass 51  
 FEUERBACHkreis 13  
 Finite Elemente 11  
 Fläche 24, 122  
   Gleichungsdarstellung  
     129  
   Parameterdarstellung 122  
   Umfang 24  
   zweiter Ordnung 129–132  
 Flächeninhalt 24, 25, 40  
   Dreieck 27, 29  
   Ellipse 127  
   Kreis 25, 127  
   Kreissektor 65  
   Paraboloid 128  
   Parallelogramm 26, 84,  
     88  
   parametrisierte Fläche  
     126  
   Rechteck 25, 26  
   Rotationsfläche 45  
   Rotationsparaboloid 128  
   Trapez 27  
   Vieleck 29, 30  
 Fluchtpunkt 149  
**fminsearch** 138  
 frei verfügbare Software 6  
  
 freier Vektor 54  
**fsolve** 138  
 Funktionskurve 118  
  
 Ganghöhe 47  
 GAUSS 55  
 GAUSSsche Trapez- und  
   Dreiecksformel 30  
 gegensinnig 17  
 genormte  
   Dimetrie 148, 159–161  
   Isometrie 148, 159, 161  
 geodätischer Abstand 65, 66  
 geographische Koord. 78, 79  
 geometrischer Vektor 54  
 Gerade 106, 116, 117  
 Geschwindigkeitsvektor 109  
 gleichschenkliges Dreieck 11  
 gleichseitiges Dreieck 11  
 gleichsinnig 17  
 Gleichungsdarstellung  
   Ebene 130  
   Ellipse 115, 120  
   Fläche 129  
     zweiter Ordnung 131  
   Funktionskurve 118  
   Gerade 117  
   Hyperbel 120  
   Kreis 114, 115  
   Kugel 129  
   Kurve 114  
     zweiter Ordnung 119  
   Parabel 120  
   Rotationsfläche 129  
 Gon und gon 64  
**GON**, gon 64  
 Grad 63  
 Grad und grad 64  
**GRAD**, grad 64  
 GRASSMANNscher  
   Entwicklungssatz 91  
 Großkreis 66, 108, 109  
 Großkreisbogen  
   Parameterdarstellung  
     108, 109  
 Grundaufgabe 150  
 Grundriss 146, 150, 153  
 GULDINSche Regeln 45, 46  
 Halbkreissschwerpunkt 49  
 Hauptachsen-  
   transformation 122, 129  
 Hauptscheitel 120  
 Helix 47, 108  
 HERONische Formel 29  
 HESSEsche Normalform 116,  
   117, 130  
 Hexaeder 53  
**HMS** 64  
 Höhe  
   Dreieck 12, 27  
   Kegel 44  
   Parallelogramm 26  
   Trapez 27  
   Zylinder 42  
 Höhenlinien 152  
 Höhenschnittpunkt 12, 162  
 Höhenschnittverfahren 152  
 homogene Koord. 103, 149  
 Horizontalspur 154  
 Hund-Herrchen-Problem  
   113  
 Hyperbel 118–121  
 Hyperboloid 124, 130, 131  
   Parameterdarstellung 125  
   Volumen 51  
 Hypotenuse 33  
 Ikosaeder 53  
 Ingenieuraxonomie 148  
 Inkreismittelpunkt 12, 162  
 Innenwinkel 11  
 inverse Drehung 96  
 Isometrie 148, 161  
 kartesische Koord. 9, 54,  
   68, 73  
 Kathete 33  
 Kavalierperspektive 157,  
   158  
 Kegel 43, 124, 131  
   Mantelfläche 46  
   Parameterdarstellung  
     123, 125  
   Volumen 44, 51  
 Kegelschnitt 118, 119, 122  
 Kegelstumpf 124  
 Kettenlinie 112  
 Körper 40, 122  
 komplanar 91  
 Kongruenz 17, 99  
 Kongruenzsätze 18, 162  
   SsW und sSW 35

- Konoid 51  
 konvex 12, 14, 52  
 Koordinaten  
   geographische 78, 79  
   homogene 103, 149  
   kartesische 9, 54, 68, 73  
   krummlinige 73  
   parallele 73  
   polare 74, 76  
   rechtwinklige 73  
   schiefwinklige 73  
   -einheitsvektor 69–71, 86, 91  
   -flächen 81  
   -gitter 73  
   -linien 74, 81, 106  
   -transformation 71  
 Kosinussatz 34, 62  
 kosmischer Körper 53  
 Kote 146, 150, 157  
 kotierte Projektion 146, 150  
 Kreis 19  
   Flächeninhalt 25, 127  
   Gleichungsdarstellung 114, 115  
   Parameterdarstellung 106, 107  
   Umfang 25, 114  
 Kreisbogen  
   Länge 65, 114  
   Parameterdarstellung 106, 107  
 Kreisfläche 123  
 Kreiskegel 123, 124  
 Kreiskegelstumpf 124  
 Kreissektor  
   Flächeninhalt 65  
 Kreiszyylinder 123, 124  
 Kreiszyylinderkoordinaten 77  
 Kreuzprodukt 88, 90, 91  
 Kreuzriss 146, 153  
 Krümmung 15  
 krummlinige Koord. 73  
 Kühlturm 125  
 Kugel  
   Gleichungsdarstellung 129  
   Oberfläche 127  
   Parameterdarstellung 123  
   Volumen 48, 51  
   Kugelkoordinaten 78, 80  
   Kurs 109  
   Kurve 106  
     Gleichungsdarstellung 114  
     Parameterdarstellung 106  
     zweiter Ordnung 119, 122  
   Kurvenlänge 113  
   Länge  
     Ellipsenbogen 114  
     Helix 47  
     Kreisbogen 65, 114  
     Kurve 113  
     Schraublinie 47  
     Vektor 58, 62  
     EUKLIDISCHE 65  
     Rechenregeln 61  
   Längengrad 78  
   Längenkreis 81  
   Landmessung 9  
   Leitkurve  
     Konoid 51  
     Translationsfläche 46  
     Translationskörper 46  
   Leitlinie 120  
   Lineare Algebra 6, 54  
   lineare Transformation 99  
   Lot auf eine Ebene 150  
   Mantelfläche 46, 128  
   Mantellinie 43  
   MAPLE 55  
   MATHCAD 55  
   MATHEMATICA 55  
   MATLAB 5, 6, 55  
   Matrix 54  
     orthogonale 71, 98, 99  
     Rechenregeln 60  
     Veranschaulichung 99–101  
     Verknüpfungsregeln 61  
   Mehrtafelprojektion 146  
   Meridian 81  
   Meter und Seemeile 84  
   mgon 64  
   Militärperspektive 157, 158  
   Milligon 64  
   Minute 63, 64  
   Mittelpunktswinkel 37, 63  
   Mittelsenkrechte 12  
   Möndchen des HIPPOKRATES 36  
   Multiplikation einer Matrix  
     mit einem Skalar 55  
     mit einer Matrix 57, 58  
     FALKSCHEMA 57  
     Veranschaulichung 102  
   MuPAD 55  
   Nebenseitel 121  
   Neugrad 64  
   Neunpunktkekreis 13  
   Norm 65  
   **norm** 59  
   Normalenvektor 116, 129  
   Normallage 107, 116, 121, 129  
   Normalprojektion 148  
   Normalschnittebene 151, 154  
   normierter Vektor 60  
   Nullmatrix 59  
   Nullvektor 59  
   numerische Exzentrizität 121  
   O-Matrix 55  
   Oberfläche 24, 40  
     Kugel 127  
     Rotationsfläche 45  
     Torus 45  
   Octave 55  
   Oktaeder 53  
   Ordnern, Ordnungslinie 154  
   orientierter Winkel 75, 86  
   Orientierung  
     einer Transformation 100  
     und Richtung 56, 60  
     zweier ebener Vektoren 86  
   orthogonale  
     Axonometrie 148, 157  
     Matrix 71, 98, 99  
     Parallelprojektion 148  
     Zerlegung 66  
     Zweitafelprojektion 153  
   Orthogonalraum 68  
   Ortskreis 38–40, 164  
   Ortslinien 120  
   Ortsvektor 54, 56  
   Ox 55  
   Papierformat 22, 24  
   Parabel 118–121

- Paraboloid 130, 131  
   Flächeninhalt 128  
   Parameterdarstellung 128  
   Volumen 51  
 Parallelkoordinaten 73  
 Parallelogramm 14, 16, 19, 61  
   Flächeninhalt 26, 84, 88  
   Höhe 26  
   Parameterdarstellung 123  
 Parallelprojektion 146, 147  
 Parallelspat 88, 89, 123  
 Parameterbereich 106  
 Parameterdarstellung  
   Ebene 123  
   Ellipse 106, 107, 121  
   Ellipsenfläche 123  
   Ellipsoid 127  
   Fläche 122  
     zweiter Ordnung 132  
   Funktionskurve 118  
   Gerade 106  
   Großkreisbogen 108, 109  
   Helix 109  
   Hyperbel 121  
   Hyperboloid 125  
   Körper 122  
   Kegel 123, 125  
   Kreis 106, 107  
   Kreisbogen 106, 107  
   Kreisfläche 123  
   Kreiskegel 123  
   Kreiszyylinder 123  
   Kugel 123, 127  
   Kurve 106  
     zweiter Ordnung 119  
   Parabel 121  
   Paraboloid 128  
   Parallelogramm 123  
   Parallelspat 123  
   Radlinie 113  
   Rotations-  
     fläche 124  
     hyperboloid 125  
     paraboloid 128  
   Schleppkurve 113  
   Schraubfläche 126  
   Schraublinie 109  
   Strahl 106  
   Strecke 106  
   Torus 124  
   Traktrix 113  
   Translationsfläche 125  
   Viertelebene 123  
   Zykloide 113  
   Zylinder 123, 125  
 Pentagonododekaeder 53  
 Peripheriewinkel 37  
 planar 108  
 platonischer Körper 53  
**Pol** 77  
**pol2cart** 76, 78  
 Polarkoordinaten 74, 76  
**polyarea** 31  
 Polyeder 40, 52, 53  
 Polygon 11, 14  
 Polygonzug 11, 14  
**P→R** 76, 78  
 Prisma 42  
   Volumen 42, 51  
 Prismatoid, Prismoid 51  
 Profilkurve 44, 46  
 Projektion 146  
   auf eine Ebene 146, 149  
   auf einen Vektor 67  
 Projektionsmatrix 68, 149  
 projizierend 151, 152  
 Pyramide 43  
   Volumen 44, 51  
 PYTHAGORAS 33  
   Erweiterung für ähnliche  
   Figuren 36  
   Länge  $n$ -dimensionaler  
   Vektoren 58  
   Umkehrung 34  
   Verallgemeinerung  
   (Kosinussatz) 34, 62  
 Quader 41  
 Quadrat 14, 19  
 Quadrik 122, 129, 131  
**RAD** , rad 64  
 Radiant 63, 64  
 Radlinie 112  
 Raum-Zeit-Kontinuum 15  
 Raute 14, 19  
**Rec** 77  
 Rechteck 14, 19  
   Flächeninhalt 25, 26  
   Verformung 10  
   rechtwinklige Koord. 73  
   rechtwinkliges Dreieck 11, 162  
   regelmäßiges Polyeder 53  
   regelmäßiges Vieleck 14  
   reguläres Polyeder 53  
   reguläres Vieleck 14  
   Relativitätstheorie 15  
   Rhombus 14  
   Richtung und Orientierung  
     56, 60  
   Richtungs-  
     vektor 60, 106, 122  
   Richtungskosinus 95  
   Rohrkörper 47  
   Rotation einer Strecke 124  
   Rotations-  
     fläche 44, 45, 124, 129  
     hyperboloid 124, 125  
     körper 44, 45, 48, 128  
     paraboloid 128  
**R→P** 76, 78  
 S-PLUS 55  
 Scheitel 120, 121  
 Scheitelgleichung 121  
 schiefe  
   Axonometrie 148, 157  
   Parallelprojektion 148  
 schiefwinklige Koord. 73  
 Schiff-Hafen-Leuchtturm-  
   Kirche-Problem 40, 164  
 Schleppkurve 113  
 Schnitt  
   allgemein 143  
   Ebene/Ebene 141, 150  
   Ebene/Ebene/Ebene 130  
   Ebene/Gerade 142, 150  
   Gerade/Ebene 142, 150  
   Gerade/Gerade 141  
   Gerade/Kugel 144  
   Schraubfläche 47, 126  
   Schraubkörper 47  
   Schraublinie 47, 108  
   Schraubung 47  
   Schwerpunkt 162  
   Dreieck 12  
   Halbkreis 49  
   Vieleck 31  
 SciLab 55

- Sechspunktekreis 11  
 Seelenradius 45  
 Seeemeile und Meter 84  
 Sehne 37  
 Sehnenviereck 37  
 Seitenhalbierende 12  
 Sekunde 63, 64  
 Semiperimeter 29  
 sexagesimale Unterteilung  
     63, 64  
 Skalarprodukt 58  
 sm 84  
 Spatprodukt 88  
 spezielle Lage 151, 152  
**sph2cart** 79  
 sphärischer Abstand 66, 83  
 sphärischer Exzess 15  
 Spiegelung 17, 99  
 spitzwinkliges Dreieck 11  
 Spur 150, 152, 154  
 SsW und sSW 35  
 Standlinie 29  
 Stauchung 100  
 sternförmig 12, 14, 52  
 Sternpunkt 12, 14  
 Strahl 106  
 Strahlensätze 20–22  
 Strecke 106  
 Streckung 100  
 stumpfwinkliges Dreieck 11,  
     162  
 Summe der Innenwinkel 13  
 Tangentenvektor 109  
 tangentielle Komponente  
     112  
 Tangentialebene 135  
 Tetraeder 53  
 THALES 37  
 Torus 45, 124  
 Traktrix 113  
 Transformation, lineare 39  
 Translationsfläche 46, 125  
 Translationskörper 46  
 Transponieren 55  
 Trapez 14  
     Flächeninhalt 27  
     Höhe 27  
 Trapez- und  
     Dreiecksverfahren 29  
 Trimetrie 148, 159, 161  
 überschlagen 14  
 Umfang  
     Ellipse 114  
     Fläche 24  
     Kreis 25, 114  
     Vieleck 24  
 Umfangswinkel 37  
 Umklappung 151, 155  
 Umkreismittelpunkt 12, 162  
 Umlaufsinn 17  
 Vektor 54  
     freier 54  
     geometrischer 54  
     Länge 58, 62  
         EUKLIDISCHE 65  
         Rechenregeln 61  
     normierter 60  
     Rechenregeln 60  
     Verknüpfungsregeln 61  
     -produkt 88, 90, 91  
     -raum 61  
         EUKLIDISCHER 65  
 Veranschaulichung  
     Diagonalmatrix 100  
     Matrix 100  
     Matrizenmultiplikation  
         102  
     orthogonale Matrix 99  
 Verschiebung 17  
 verschränkt 14  
 Vieleck 11, 14  
     Flächeninhalt 29, 30  
     konvex 12, 14  
     mit Selbstüberschneidung  
         14  
     regelmäßiges 14  
     reguläres 14  
     Schwerpunkt 31  
     sternförmig 12, 14  
     Umfang 24  
 Vielflächner 52  
 Viereck 10, 14, 19, 37  
     zu vier Seitenlängen und  
         einem Innenwinkel  
         11  
 Viertelebene 123  
 Vogelperspektive 157, 158  
 Volumen 40  
     Berechnung mittels  
         Schnittflächen 49, 50  
 Ellipsoid 51, 128  
 Fass 51  
 Hyperboloid 51  
 Kegel 44, 51  
 Kugel 48, 51  
 Paraboloid 51  
 Parallelspat 89  
 parametrisierter Körper  
     126  
 Polyeder 52  
 Prisma 42, 51  
 Prismatoid, Prismoid 51  
 Pyramide 44, 51  
 Quader 41  
 Rohrkörper 47  
 Rotationskörper 45, 48  
 Torus 45  
 Translationskörper 46  
 Zylinder 42, 46, 51  
 wahre Gestalt 155  
 wahre Länge 150, 155  
 wahrer Winkel 150, 155  
 windschief 124, 136, 137  
 Winkel, Orientierung 75, 86  
 Winkel zwischen Vektoren  
     62, 63, 86, 88  
 Winkeleinheiten 63  
 Winkelhalbierende 12, 13  
 Winkelsumme 13  
 Würfel als platonischer  
     Körper 53  
 Wulstradius 45  
 Zeichenebene 150  
 Zenit 112  
 Zenitdistanz 80, 144  
 Zentralprojektion 146, 148,  
     149  
 Zentriwinkel 37  
**zeros** 60  
 Zweitafelprojektion 146,  
     153  
 zweitprojizierend 154  
 Zykloide 112  
 Zylinder 41, 124, 131  
     Parameterdarstellung  
         123, 125  
     Volumen 42, 46, 51  
 Zylinderkoordinaten 78