

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Randwertprobleme</b>	<b>11</b>
1.1	Potentialgleichung . . . . .	11
1.2	Lineare Elastostatik . . . . .	15
1.2.1	Ebene Elastizitätstheorie . . . . .	19
1.2.2	Inkompressibles Materialverhalten . . . . .	21
1.3	Stokes-System . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Funktionenräume</b>	<b>25</b>
2.1	Die Räume $C^k(\Omega)$ , $C^{k,\kappa}(\Omega)$ und $L_p(\Omega)$ . . . . .	25
2.2	Verallgemeinerte Ableitungen und Sobolev-Räume . . . . .	28
2.3	Eigenschaften von Sobolev-Räumen . . . . .	31
2.4	Distributionen und Sobolev-Räume . . . . .	35
2.5	Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Variationsmethoden</b>	<b>46</b>
3.1	Operatorgleichungen . . . . .	46
3.2	Elliptische Operatoren . . . . .	50
3.3	Operatoren und Stabilitätsbedingungen . . . . .	52
3.4	Gleichungen mit Nebenbedingungen . . . . .	55
3.5	Sattelpunktprobleme . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Variationsformulierungen von Randwertproblemen</b>	<b>63</b>
4.1	Potentialgleichung . . . . .	63
4.1.1	Dirichlet-Randwertproblem . . . . .	65
4.1.2	Dirichlet-Problem und Sattelpunkt-Formulierung . . . . .	68
4.1.3	Neumann-Randwertproblem . . . . .	70
4.1.4	Gemischte Randbedingungen . . . . .	73
4.1.5	Robin-Randbedingungen . . . . .	75
4.2	Lineare Elastostatik . . . . .	75
4.2.1	Dirichlet-Randwertproblem . . . . .	79
4.2.2	Neumann-Randwertproblem . . . . .	81
4.2.3	Gemischte Randbedingungen . . . . .	83
4.3	Stokes-Problem . . . . .	83

<b>5</b>	<b>Fundamentallösungen partieller Differentialoperatoren</b>	<b>89</b>
5.1	Laplace-Operator . . . . .	90
5.2	Lineare Elastostatik . . . . .	96
5.3	Stokes-Problem . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Randintegraloperatoren</b>	<b>106</b>
6.1	Newton-Potential . . . . .	106
6.2	Einfachschichtpotential . . . . .	112
6.3	Adjungiertes Doppelschichtpotential . . . . .	114
6.4	Doppelschichtpotential . . . . .	118
6.5	Hypersingulärer Integraloperator . . . . .	121
6.6	Eigenschaften der Randintegraloperatoren . . . . .	130
6.6.1	Elliptizität des Einfachschichtpotentials . . . . .	132
6.6.2	Elliptizität des hypersingulären Integraloperators . . . . .	137
6.6.3	Steklov-Poincaré-Operator . . . . .	141
6.6.4	Kontraktionseigenschaft des Doppelschichtpotentials . . . . .	142
6.6.5	Abbildungseigenschaften . . . . .	146
6.7	Lineare Elastostatik . . . . .	149
6.8	Stokes-System . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Randintegralgleichungen</b>	<b>161</b>
7.1	Dirichlet-Randwertproblem . . . . .	162
7.2	Neumann-Randwertproblem . . . . .	165
7.3	Gemischte Randbedingungen . . . . .	169
7.4	Robin-Randbedingungen . . . . .	171
7.5	Randwertprobleme im Außenraum . . . . .	172
<b>8</b>	<b>Näherungsmethoden für Variationsprobleme</b>	<b>174</b>
8.1	Galerkin-Bubnov-Verfahren . . . . .	174
8.2	Approximation der Linearform . . . . .	177
8.3	Approximation des Operators . . . . .	178
8.4	Galerkin-Petrov-Verfahren . . . . .	180
8.5	Sattelpunktprobleme . . . . .	182
<b>9</b>	<b>Finite Elemente</b>	<b>187</b>
9.1	Referenzelemente . . . . .	187
9.2	Formfunktionen . . . . .	195
9.3	Ansatzräume . . . . .	200
9.4	Quasi-Interpolationsoperatoren . . . . .	209
<b>10</b>	<b>Randelemente</b>	<b>212</b>
10.1	Referenzelemente . . . . .	212
10.2	Ansatzräume . . . . .	215

<b>11 Finite Element Methoden</b>	<b>226</b>
11.1 Dirichlet–Randwertproblem . . . . .	226
11.2 Neumann–Randwertproblem . . . . .	235
11.3 FEM mit Lagrange–Multiplikatoren . . . . .	238
<b>12 Randelementmethoden</b>	<b>245</b>
12.1 Dirichlet–Randwertproblem . . . . .	245
12.2 Neumann–Randwertproblem . . . . .	256
12.3 Gemischte Randbedingungen . . . . .	263
12.4 Robin–Randbedingungen . . . . .	269
<b>13 Vorkonditionierte Iterationsverfahren</b>	<b>271</b>
13.1 Das Verfahren konjugierter Gradienten . . . . .	271
13.2 Eine allgemeine Vorkonditionierungsstrategie . . . . .	279
13.2.1 Eine Anwendung bei Randelementmethoden . . . . .	282
13.2.2 Eine Multilevel–Vorkonditionierung in der FEM . . . . .	286
13.3 Lösungsverfahren für Sattelpunktprobleme . . . . .	299
<b>14 Schnelle Randelementmethoden</b>	<b>307</b>
14.1 Hierarchische Cluster–Methoden . . . . .	308
14.2 Approximation der Steifigkeitsmatrix . . . . .	312
14.2.1 Darstellung mit Taylor–Reihen . . . . .	316
14.2.2 Reihendarstellung der Fundamentallösung . . . . .	320
14.2.3 Adaptive Cross–Approximation . . . . .	324
14.3 Wavelets . . . . .	331
<b>15 Gebietszerlegungsmethoden</b>	<b>346</b>
<b>Literatur</b>	<b>353</b>
<b>Index</b>	<b>360</b>