

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Metrische Räume, normierte Räume und Hilberträume</b>	<b>11</b>
1.1	Metrische und normierte Räume . . . . .	11
1.2	Vektorräume mit Skalarprodukt (Prähilberträume) . . . . .	17
1.3	Konvergenz und Vollständigkeit . . . . .	26
1.4	$L^p$ -Räume . . . . .	38
1.5	Orthogonalität . . . . .	47
1.6	Tensorprodukte von Hilberträumen . . . . .	59
1.7	Übungen . . . . .	63
<b>2</b>	<b>Lineare Operatoren und Funktionale</b>	<b>68</b>
2.1	Beschränkte Operatoren . . . . .	69
2.2	Stetige lineare Funktionale . . . . .	74
2.3	Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, starke und schwache Konvergenz . . . . .	84
2.4	Der adjungierte Operator . . . . .	93
2.5	Orthogonale Projektionen, isometrische und unitäre Operatoren . . . . .	109
2.6	Anhang zu Kapitel 2 . . . . .	119
2.6.1	Der Interpolationssatz von Riesz–Thorin . . . . .	119
2.6.2	Selbstadjungierte Fortsetzungen hermitescher Operatoren . . .	122
2.7	Übungen . . . . .	125

<b>3</b>	<b>Kompakte Operatoren</b>	<b>130</b>
3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	130
3.2	Entwicklungssätze . . . . .	137
3.3	Hilbert–Schmidt–Operatoren . . . . .	144
3.4	Die Schattenklassen kompakter Operatoren . . . . .	148
3.5	Übungen . . . . .	156
<b>4</b>	<b>Abgeschlossene Operatoren</b>	<b>159</b>
4.1	Satz vom abgeschlossenen Graphen . . . . .	159
4.2	Halbbeschränkte Operatoren und Formen . . . . .	170
4.3	Normale Operatoren . . . . .	176
4.4	Komplexifizierung und Konjugation . . . . .	178
4.5	Übungen . . . . .	183
<b>5</b>	<b>Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren</b>	<b>187</b>
5.1	Grundbegriffe der Spektraltheorie . . . . .	187
5.2	Das Spektrum selbstadjungierter, symmetrischer und normaler Operatoren . . . . .	197
5.3	Operatoren mit reinem Punktspektrum . . . . .	202
5.4	Spektraltheorie allgemeiner kompakter Operatoren . . . . .	206
5.5	Übungen . . . . .	212
<b>6</b>	<b>Klassen linearer Operatoren</b>	<b>214</b>
6.1	Multiplikationsoperatoren . . . . .	214
6.2	Matrixoperatoren . . . . .	217
6.3	Integraloperatoren . . . . .	225
6.4	Hilbert–Schmidt– und Carlemanoperatoren . . . . .	231
6.5	Differentialoperatoren in $L^2(a, b)$ . . . . .	243
6.6	Übungen . . . . .	254

<b>7</b>	<b>Quantenmechanik und Hilbertraumtheorie</b>	<b>256</b>
7.1	Formalismus der Quantenmechanik . . . . .	256
7.2	Die Evolutionsgruppe und die Selbstadjungiertheit des Schrödingeroperators . . . . .	264
7.3	Übungen . . . . .	273
<b>8</b>	<b>Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren</b>	<b>276</b>
8.1	Integrale bezüglich einer Spektralschar . . . . .	276
8.2	Operatoren als Integrale über Spektralscharen . . . . .	284
8.3	Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren . . . . .	292
8.4	Funktionen selbstadjungierter Operatoren . . . . .	301
8.5	Spektrum und Spektralschar . . . . .	305
8.6	Halbordnung selbstadjungierter Operatoren . . . . .	313
8.7	Übungen . . . . .	318
<b>9</b>	<b>Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren</b>	<b>323</b>
9.1	Störungen selbstadjungierter Operatoren . . . . .	324
9.2	Stabilität des wesentlichen Spektrums . . . . .	333
9.3	Norm- und starke Resolventenkonvergenz . . . . .	341
9.4	Übungen . . . . .	353
<b>10</b>	<b>Selbstadjungierte Fortsetzungen symmetrischer Operatoren</b>	<b>357</b>
10.1	Defektzahlen und Cayleytransformierte . . . . .	358
10.2	Konstruktion selbstadjungierter Fortsetzungen . . . . .	366
10.3	Kriterien für die Gleichheit der Defektzahlen . . . . .	369
10.4	Spektren selbstadjungierter Fortsetzungen symmetrischer Operatoren . . . . .	373
10.5	Übungen . . . . .	377

<b>11</b>	<b>Fouriertransformation und Differentialoperatoren</b>	<b>380</b>
11.1	Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^m)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ . . . . .	380
11.2	Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R}^m)$ . . . . .	389
11.3	Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten . . . . .	396
11.4	Elliptische Differentialoperatoren und Sobolev-Räume . . . . .	400
11.5	Der Operator $-\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$ . . . . .	409
11.6	Übungen . . . . .	415
<b>A</b>	<b>Einführung in die Lebesguesche Integrationstheorie</b>	<b>419</b>
A.1	Prämaße und Nullmengen . . . . .	419
A.2	Das Integral für Elementarfunktionen . . . . .	421
A.3	Integrierbare Funktionen . . . . .	426
A.4	Grenzwertsätze . . . . .	428
A.5	Meßbare Mengen und Funktionen, Maße . . . . .	430
A.6	Produktmaße; der Satz von Fubini-Tonelli . . . . .	435
A.7	Der Satz von Radon-Nikodym . . . . .	438
A.8	Absolut stetige Funktionen und partielle Integration . . . . .	441
A.9	Komplexe Maße . . . . .	442
A.10	Übungen . . . . .	446
<b>B</b>	<b>Die Stieltjessche Umkehrformel und ein Satz von G. Herglotz</b>	<b>451</b>
<b>C</b>	<b>Der Satz von Stone-Weierstraß</b>	<b>458</b>
	<b>Literatur</b>	<b>462</b>
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b>	<b>466</b>