

# Inhaltsverzeichnis

---

## Teil I Präludium

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	3
1.1	Reguläre und irreguläre Abtastung in der Signalverarbeitung ..	3
1.1.1	Ein einführendes Beispiel .....	7
1.2	Eine kurze Geschichte der regulären und irregulären Abtastung	11
<b>2</b>	<b>Ein Ausflug in die Funktionalanalysis</b> .....	15
2.1	Metrische Räume .....	15
2.1.1	Definition metrischer Räume .....	15
2.1.2	Konvergenz in metrischen Räumen .....	16
2.1.3	Teilmengen metrischer Räume .....	17
2.1.4	Beispiele .....	18
2.2	Lineare Räume .....	21
2.2.1	Definition von linearen Räumen .....	21
2.2.2	Teilmengen linearer Räume .....	22
2.2.3	Beispiele .....	24
2.3	Normierte Räume .....	25
2.3.1	Definition normierter Räume .....	25
2.3.2	Konvergenz in normierten Räumen .....	26
2.3.3	Banach-Räume .....	27
2.3.4	Teilmengen normierter Räume .....	28
2.3.5	Beispiele .....	29
2.4	Hilbert-Räume .....	31
2.4.1	Definition von Hilbert-Räumen .....	31
2.4.2	Optimale Approximation in Hilbert-Räumen .....	35
2.4.3	Beispiele .....	38
2.4.4	Struktur von Hilbert-Räumen .....	42
2.5	Lineare Operatoren .....	50
2.5.1	Definition linearer Operatoren .....	51
2.5.2	Beispiele .....	57
2.5.3	Banachscher Fixpunktsatz .....	66
2.5.4	Neumannsche Reihe .....	68
2.6	Distributionentheorie .....	71
2.6.1	Definition der Distributionen .....	72

2.6.2	Reguläre und singuläre Distributionen	73
2.6.3	Dirac-Distribution	73
2.7	Schwartz-Raum und Temperierte Distributionen	76
2.8	Operationen auf der Dirac-Distribution	77
2.8.1	Linearität	77
2.8.2	Zeitverschiebung	77
2.8.3	Skalierung	77
2.8.4	Faltung	78
2.8.5	Multiplikation	79
2.8.6	Differentiation	79
2.8.7	Heavisidesche Sprungfunktion	79

---

**Teil II Thema**


---

<b>3</b>	<b>Die Fourier-Transformation</b>	<b>83</b>
3.1	Definition der Fourier-Transformation	83
3.2	Eigenschaften der Fourier-Transformation	84
3.2.1	Linearität	84
3.2.2	Dualität	84
3.2.3	Komplexe Konjugation	84
3.2.4	Symmetrie	85
3.2.5	Zeitverschiebung	85
3.2.6	Frequenzverschiebung	85
3.2.7	Skalierung	85
3.2.8	Faltung	86
3.2.9	Multiplikation	86
3.2.10	Differentiation	87
3.2.11	Theorem von Plancherel	87
3.2.12	Parsevalsche Gleichung	88
3.2.13	Poissonsche Summenformel	89
3.2.14	Basen in $L^2(\mathbb{R})$	89
3.3	Lineare zeitinvariante Systeme	90
3.4	Beispiele der Fourier-Transformation	91
3.4.1	Rechteck-Funktion	91
3.4.2	Gauß-Funktion	93
3.4.3	Dirac-Distribution	94
3.4.4	Harmonische Exponentialfunktion	94
3.4.5	Signum-Funktion	95
3.4.6	Heavisidesche Sprungfunktion	96
3.4.7	Dirac-Kamm	96
3.5	Fourier-Transformation periodischer Signale	97
3.5.1	Periodische Fortsetzung	98
3.5.2	Symmetrische periodische Fortsetzung	104
3.5.3	Verschobene symmetrische periodische Fortsetzung	108

3.6	Paley-Wiener-Räume	112
3.6.1	Aperiodische Signale	112
3.6.2	Periodische Signale	114
<b>4</b>	<b>Die Signaltheorie der regulären Abtastung</b>	<b>123</b>
4.1	Das Shannon-Whittaker-Kotel'nikov-Abtasttheorem	123
4.1.1	Funktionalanalytische Deutung des Abtasttheorems	126
4.1.2	Systemtheoretische Deutung des Abtasttheorems	130
4.1.3	Spektrale Deutung des Abtasttheorems	136
4.2	Zeitdiskrete Fourier-Transformation	137
4.2.1	Theorem von Plancherel	138
4.2.2	Parsevalsche Gleichung	139
4.3	Nyquist-Rate	139
4.3.1	Unterabtastung	140
4.3.2	Überabtastung	141
4.4	Periodische Signale	145
4.4.1	Periodische Fortsetzung	145
4.4.2	Symmetrische periodische Fortsetzung	155
4.4.3	Verschobene symmetrische periodische Fortsetzung	161
4.5	Diskrete Fourier-Transformation	166
4.5.1	Theorem von Plancherel	169
4.5.2	Parsevalsche Gleichung	170
4.5.3	Zyklische Faltung	170
4.6	Schnelle Fourier-Transformation	171

---

**Teil III Kontrapunkt**

---

<b>5</b>	<b>Die Theorie der Rahmen</b>	<b>181</b>
5.1	Definition der Rahmen	182
5.2	Rahmenoperator	186
5.3	Invertierung des Rahmenoperators	190
5.3.1	Rahmenalgorithmus	191
5.3.2	Relaxierter Rahmenalgorithmus	194
5.3.3	Konjugierter Gradientenalgorithmus	198
5.4	Duale Rahmen	199
5.5	Signalrepräsentation mittels Rahmen	200
5.6	Moore-Penrose-Pseudoinverse	203
5.7	Rahmenpaare	207
5.8	Rauschreduktion mittels Rahmen	211
5.9	Rahmentheorie der Überabtastung	215

<b>6</b>	<b>Die Signaltheorie der irregulären Abtastung</b> . . . . .	223
6.1	Aufgabenstellung der irregulären Abtastung . . . . .	223
6.2	Ganze Funktionen vom exponentiellen Typ . . . . .	225
6.2.1	Ein kurzer Ausflug in die Funktionentheorie . . . . .	225
6.2.2	Definition ganzer Funktionen vom exponentiellen Typ . . . . .	227
6.3	Nichtharmonische Fourier-Reihen . . . . .	230
6.3.1	Stabilität der nichtharmonischen Fourier-Reihen . . . . .	232
6.3.2	Das Rekonstruktionsproblem der nichtharmonischen Fourier-Reihen . . . . .	234
6.4	Nichtharmonische Fourier-Reihen und irreguläre Abtastung . . . . .	236
6.4.1	Stabilität der irregulären Abtastung . . . . .	239
6.4.2	Das Rekonstruktionsproblem der irregulären Abtastung . . . . .	241
6.4.3	Nichtharmonische Fourier-Reihen und ganze Funktionen vom exponentiellen Typ . . . . .	243
6.5	Irreguläre Abtastung im Paley-Wiener-Raum $\mathcal{PW}_\Omega$ . . . . .	247
6.5.1	Rahmen im Paley-Wiener-Raum $\mathcal{PW}_\Omega$ . . . . .	248
6.5.2	Die Rahmengrenzen im Paley-Wiener-Raum $\mathcal{PW}_\Omega$ . . . . .	252
6.5.3	Gewichtete Rahmen im Paley-Wiener-Raum $\mathcal{PW}_\Omega$ . . . . .	258
6.5.4	Rahmenpaare im Paley-Wiener-Raum $\mathcal{PW}_\Omega$ . . . . .	275
6.5.5	Lokale Mittelwerte im Paley-Wiener-Raum $\mathcal{PW}_\Omega$ . . . . .	280
6.6	Irreguläre Abtastung zeitbegrenzter Signale . . . . .	285
6.6.1	Periodische Fortsetzung . . . . .	286
6.6.2	Symmetrische periodische Fortsetzung . . . . .	304
6.6.3	Verschobene symmetrische periodische Fortsetzung . . . . .	318
6.7	Rahmen und Rahmenpaare in Paley-Wiener-Räumen . . . . .	328

---

## Teil IV Coda

---

<b>7</b>	<b>Signalverarbeitung auf der Basis irregulärer Abtastung</b> . . . . .	333
7.1	Rekonstruktionsalgorithmen . . . . .	333
7.2	Rekonstruktion zeitlich unbegrenzter Signale . . . . .	335
7.3	Rekonstruktion zeitlich begrenzter Signale . . . . .	343
7.3.1	Periodisch fortgesetzte Signale . . . . .	343
7.3.2	Symmetrisch periodisch fortgesetzte Signale . . . . .	355
7.3.3	Verschoben symmetrisch periodisch fortgesetzte Signale . . . . .	363
7.4	Trigonometrische Polynome . . . . .	368
7.5	Finite irreguläre Abtastung . . . . .	377
7.6	Statistische Fehleranalyse . . . . .	382
7.6.1	Statistisches Fehlermodell . . . . .	384
<b>8</b>	<b>Anwendungen der irregulären Abtastung</b> . . . . .	389
8.1	Analog-Digital-Wandler . . . . .	390
8.2	Nulldurchgangsdemulatoren . . . . .	396
8.2.1	Rekonstruktion der Augenblicksphase . . . . .	398

8.2.2 Rekonstruktion der Augenblicksfrequenz ..... 402  
 8.3 Spektralschätzung ..... 404

---

**Teil V Anhang**

---

**A Grundbegriffe der statistischen Signaltheorie** ..... 413  
 A.1 Wahrscheinlichkeitstheorie ..... 413  
 A.2 Zufallsvariable ..... 415  
 A.3 Erwartungswert ..... 416  
 A.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen ..... 417  
     A.4.1 Gleichverteilung ..... 417  
     A.4.2 Normalverteilung ..... 418  
 A.5 Verbundwahrscheinlichkeiten ..... 418  
 A.6 Zufallsprozesse ..... 420

**Literaturverzeichnis** ..... 423

**Index** ..... 427