

Inhaltsverzeichnis

Teil I Unendliche Produkte und Partialbruchreihen

1	Unendliche Produkte holomorpher Funktionen	3
1.1	Unendliche Produkte	4
1.1.1	Unendliche Produkte von Zahlen	4
1.1.2	Unendliche Produkte von Funktionen	6
1.2	Normale Konvergenz	7
1.2.1	Normale Konvergenz	7
1.2.2	Normal konvergente Produkte holomorpher Funktionen	9
1.2.3	Logarithmische Differentiation	10
1.3	Das Sinusprodukt $\sin \pi z = \pi z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z^2/\nu^2)$	12
1.3.1	Standardbeweis (mittels logarithmischer Differentiation und der Partialbruchreihe des Cotangens)	12
1.3.2	Charakterisierung des Sinus durch die Verdopplungsformel	14
1.3.3	Beweis der Eulerschen Formel mit Hilfe von Lemma 1.6	15
1.3.4	Beweis der Verdopplungsformel für das EULER-Produkt nach EISENSTEIN*	16
1.3.5	Historisches zum Sinusprodukt	18
1.4	EULERSche Partitionsprodukte*	19
1.4.1	Partitionen natürlicher Zahlen und EULERSche Produkte	19
1.4.2	Pentagonal-Zahlen-Satz. Rekursionsformeln für $p(n)$ und $\sigma(n)$	21
1.4.3	Potenzreihenentwicklung von $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + q^{\nu}z)$ nach z	23
1.4.4	Historisches zu Partitionen und zum Pentagonal-Zahlen-Satz	24
1.5	Jacobis Produktdarstellung* der Reihe $J(z, q) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} z^{\nu}$	25
1.5.1	Theorem von JACOBI	26
1.5.2	Diskussion des Jacobischen Theorems	27
1.5.3	Historisches zur Jacobischen Identität	28

2	Die Gammafunktion	31
2.1	Die WEIERSTRASSsche Funktion $\Delta(z) = ze^{\gamma z} \prod_{\nu \geq 1} (1+z/\nu)e^{-z/\nu}$	33
2.1.1	Die Hilfsfunktion $H(z) := z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1+z/\nu)e^{-z/\nu}$	33
2.1.2	Die Funktion $\Delta(z) := e^{\gamma z} H(z)$	35
2.2	Die Gammafunktion	36
2.2.1	Eigenschaften der Γ -Funktion	37
2.2.2	Historische Notizen	39
2.2.3	Die logarithmische Ableitung $\psi := \Gamma'/\Gamma$	40
2.2.4	Das Eindeutigkeitsproblem	41
2.2.5	Multiplikationsformeln	43
2.2.6	Satz von HÖLDER*	45
2.2.7	Der Logarithmus der Γ -Funktion*	45
2.3	Eulersche und Hankelsche Integraldarstellung von $\Gamma(z)$	47
2.3.1	Konvergenz des Eulerschen Integrals	48
2.3.2	Der Satz von EULER	49
2.3.3	Variante des Eulerschen Integrals*	51
2.3.4	Das Hankelsche Schleifenintegral	53
2.4	Stirlingsche Formel und Gudermanssche Reihe	55
2.4.1	Stieltjessche Definition der Funktion $\mu(z)$	56
2.4.2	Die Stirlingsche Formel	57
2.4.3	Wachstum von $ \Gamma(x + iy) $ für $ y \rightarrow \infty$	60
2.4.4	Gudermanssche Reihe*	60
2.4.5	Stirlingsche Reihe*	62
2.4.6	Feinabschätzungen des Restgliedes*	64
2.4.7	Binetsches Integral	65
2.4.8	Lindelöfsche Abschätzung	67
2.5	Die Betafunktion	68
2.5.1	Beweis der Eulerschen Identität	69
2.5.2	Klassische Beweise der Eulerschen Identität	70
3	Ganze Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen	75
3.1	Weierstraßscher Produktsatz für \mathbb{C}	76
3.1.1	Divisoren und Hauptdivisoren	76
3.1.2	WEIERSTRASS-Produkte	77
3.1.3	WEIERSTRASS-Faktoren	78
3.1.4	Produktsatz von WEIERSTRASS	79
3.1.5	Folgerungen	80
3.1.6	Historisches zum Produktsatz	81
3.2	Diskussion des Produktsatzes	82
3.2.1	Kanonische Produkte	83
3.2.2	Drei klassische kanonische Produkte	84
3.2.3	Die σ -Funktion	85
3.2.4	Die \wp -Funktion	87

3.2.5	Eine Bemerkung von HURWITZ*	88
4	Holomorphe Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen*	91
4.1	Produktsatz für beliebige Bereiche	91
4.1.1	Konvergenzlemma	91
4.1.2	Produktsatz für spezielle Divisoren	92
4.1.3	Allgemeiner Produktsatz	93
4.1.4	Zweiter Beweis des allgemeinen Produktsatzes*	94
4.1.5	Folgerungen	95
4.2	Anwendungen und Beispiele	96
4.2.1	Teilbarkeit in $\mathcal{O}(G)$. Größter gemeinsamer Teiler	96
4.2.2	Beispiele von WEIERSTRASS-Produkten	98
4.2.3	Historisches zum allgemeinen Produktsatz	99
4.2.4	Ausblicke auf mehrere Veränderliche	100
4.3	Beschränkte Funktionen in E und ihre Divisoren	101
4.3.1	Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas	101
4.3.2	Notwendigkeit der BLASCHKE-Bedingung	102
4.3.3	BLASCHKE-Produkte	103
4.3.4	Beschränkte Funktionen in der rechten Halbebene	104
4.3.5	Anhang zu Paragraph 4.3: Die Jensensche Formel	105
5	Satz von Iss'sa. Holomorphiegebiete	109
5.1	Der Satz von ISS'SA	109
5.1.1	Satz von BERS	109
5.1.2	Satz von ISS'SA	110
5.1.3	Beweis von Lemma 5.3	111
5.1.4	Historisches zu den Sätzen von BERS und ISS'SA	112
5.1.5	Bestimmungen aller Bewertungen* von $\mathcal{M}(G)$	113
5.2	Holomorphiegebiete	114
5.2.1	Eine Konstruktion von GOURSAT	115
5.2.2	Gut verteilte Randmengen. Erster Beweis des Existenzsatzes	117
5.2.3	Diskussion des Begriffes Holomorphiegebiet	118
5.2.4	Randnahe Mengen. Zweiter Beweis des Existenzsatzes	120
5.2.5	Historisches zum Begriff des Holomorphiegebietes	121
5.2.6	Ausblick auf mehrere Veränderliche	122
5.3	Einfache Beispiele von Holomorphiegebieten	123
5.3.1	Beispiele für \mathbb{E}	123
5.3.2	Liftungssatz	124
5.3.3	CASSINI-Bereiche und Holomorphiegebiete	124
6	Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen	127
6.1	Satz von MITTAG-LEFFLER für \mathbb{C}	127
6.1.1	Hauptteil-Verteilungen	128
6.1.2	MITTAG-LEFFLER Reihen	129

- 6.1.3 Satz von MITTAG-LEFFLER 130
- 6.1.4 Folgerungen 130
- 6.1.5 Kanonische MITTAG-LEFFLER-Reihen. Beispiele 131
- 6.1.6 Historisches zum Satz von MITTAG-LEFFLER für \mathbb{C} ... 132
- 6.2 Satz von MITTAG-LEFFLER für beliebige Bereiche 133
 - 6.2.1 Spezielle Hauptteil-Verteilungen 133
 - 6.2.2 Folgerungen 135
 - 6.2.3 Historisches zum allgemeinen Satz von MITTAG-LEFFLER 136
 - 6.2.4 Ausblicke auf mehrere Veränderliche 137
- 6.3 Idealtheorie in Ringen holomorpher Funktionen 138
 - 6.3.1 Nicht endliche erzeugbare Ideale in $\mathcal{O}(G)$ 138
 - 6.3.2 Lemma von WEDDERBURN (Darstellung der Eins) 139
 - 6.3.3 Lineare Darstellung des ggT. Hauptidealsatz 140
 - 6.3.4 Nullstellenfreie Ideale 141
 - 6.3.5 Hauptsatz der Idealtheorie für $\mathcal{O}(G)$ 142
 - 6.3.6 Historisches zur Idealtheorie holomorpher Funktionen .. 143
 - 6.3.7 Ausblicke auf mehrere Veränderliche 143

Teil II Abbildungstheorie

- 7 Die Sätze von Montel und Vitali** 147
 - 7.1 Der Satz von MONTEL 147
 - 7.1.1 Der Satz von MONTEL für Folgen 148
 - 7.1.2 Beweis des Satzes von MONTEL 149
 - 7.1.3 Montelsches Konvergenzkriterium 150
 - 7.1.4 Satz von VITALI 150
 - 7.1.5 Punktweise konvergente Folgen holomorpher Funktionen 151
 - 7.2 Normale Familien 152
 - 7.2.1 Satz von MONTEL für normale Familien 152
 - 7.2.2 Diskussion des Montelschen Satzes 153
 - 7.2.3 Historisches zum Satz von MONTEL 154
 - 7.2.4 Quadrat-integrable Funktionen und normale Familien* . 154
 - 7.3 Der Satz von VITALI 156
 - 7.3.1 Konvergenzlemma 157
 - 7.3.2 Satz von VITALI (endgültige Fassung) 157
 - 7.3.3 Historisches zum Satz von VITALI 158
 - 7.4 Anwendungen des Satzes von VITALI 159
 - 7.4.1 Vertauschung von Integration und Differentiation 159
 - 7.4.2 Kompakte Konvergenz des Γ -Integrals 160
 - 7.4.3 Satz von MÜNTZ 161
 - 7.5 Folgerungen aus einem Satz von HURWITZ 163

8	Der Riemannsche Abbildungssatz	165
8.1	Integralsätze für homotope Wege	166
8.1.1	Homotope Wege bei festen Endpunkten	166
8.1.2	Frei homotope geschlossene Wege	167
8.1.3	Nullhomotopie und Nullhomologie	168
8.1.4	Einfach zusammenhängende Gebiete	169
8.1.5	Reduktion des Integralsatzes 8.1 auf ein Lemma*	171
8.1.6	Beweis von Lemma 8.9*	172
8.2	Der Riemannsche Abbildungssatz	173
8.2.1	Reduktion auf \mathcal{Q} -Gebiete	174
8.2.2	Existenz holomorpher Injektionen	175
8.2.3	Existenz von Dehnungen	176
8.2.4	Existenzbeweis mittels eines Extremalprinzips	177
8.2.5	Zur Eindeutigkeit der Abbildungsfunktion	178
8.2.6	Äquivalenztheorem	179
8.3	Zur Geschichte des Riemannschen Abbildungssatzes	180
8.3.1	Riemanns Dissertation	180
8.3.2	Frühgeschichte	181
8.3.3	Von CARATHÉODORY-KOEBE zu FEJÉR-RIESZ	183
8.3.4	Der finale Beweis von CARATHÉODORY	184
8.3.5	Historisches zur Eindeutigkeit und zum Randverhalten	185
8.3.6	Ausblick auf mehrere Veränderliche	186
8.4	Isotropiegruppen einfach zusammenhängender Gebiete	187
8.4.1	Beispiele	187
8.4.2	Die Gruppe $\text{Aut}_a G$ für einfach zusammenhängende Gebiete $G \neq \mathbb{C}$	188
8.4.3	Abbildungsradius, Monotoniesatz*	189
8.5	Einfache Eigenschaften von Dehnungen	190
8.5.1	Dehnungslemma	190
8.5.2	Zulässige Dehnungen. Quadratwurzelverfahren	191
8.5.3	Die Mondsichel-Dehnung*	192
8.6	Der CARATHÉODORY-KOEBE-Algorithmus	193
8.6.1	Eigenschaften von Dehnungsfolgen	194
8.6.2	Konvergenzsatz	194
8.6.3	KOEBE-Familien und KOEBE-Folgen	195
8.6.4	Resümee, Konvergenzgüte	196
8.6.5	Historisches: Der Wettstreit zwischen CARATHÉODORY und KOEBE	197
8.7	Die KOEBE-Familien \mathcal{K}_m und \mathcal{K}_∞	198
8.7.1	Ein Lemma	198
8.7.2	Die Familien \mathcal{K}_m und \mathcal{K}_∞	199

9 Automorphismen und endliche innere Abbildungen 201

9.1 Innere Abbildungen und Automorphismen 201

9.1.1 Konvergente Folgen in $\text{Hol } G$ und $\text{Aut } G$ 202

9.1.2 Konvergenzsatz für Folgen von Automorphismen 203

9.1.3 Beschränkte homogene Gebiete 203

9.1.4 Innere Abbildungen von \mathbb{H} und Homothetien* 204

9.2 Iteration innerer Abbildungen 204

9.2.1 Elementare Eigenschaften 205

9.2.2 Satz von H. CARTAN 206

9.2.3 Die Gruppe $\text{Aut}_a G$ für beschränkte Gebiete 207

9.2.4 Die abgeschlossenen Untergruppen der Kreisgruppe 208

9.2.5 Automorphismen von Gebieten mit Löchern. Ringsatz* . 208

9.3 Endliche holomorphe Abbildungen 210

9.3.1 Drei allgemeine Eigenschaften 210

9.3.2 Endliche innere Abbildungen von \mathbb{E} 210

9.3.3 Randlemma für Kreisringe 212

9.3.4 Endliche innere Abbildungen von Kreisringen 213

9.3.5 Bestimmung aller endlichen Abbildungen zwischen Kreisringen 214

9.4 Satz von RADÓ. Abbildungsgrad 215

9.4.1 Abgeschlossene Abbildungen. Äquivalenzsatz 216

9.4.2 Windungsabbildungen 216

9.4.3 Satz von RADÓ 218

9.4.4 Abbildungsgrad 219

9.4.5 Ausblicke 220

Teil III Selecta

10 Sätze von Bloch, Picard und Schottky 223

10.1 Satz von Bloch 223

10.1.1 Beweisvorbereitung 224

10.1.2 Beweis des Satzes von Bloch 225

10.1.3 Verbesserung der Schranke durch Lösen eines Extremalproblems* 226

10.1.4 Satz von Ahlfors* 228

10.1.5 Landaus Weltkonstanten* 230

10.2 Kleiner Satz von Picard 231

10.2.1 Darstellung von Funktionen, die zwei Werte auslassen . . 231

10.2.2 Beweis des kleinen Picardschen Satzes 233

10.2.3 Zwei Anwendungen 233

10.3 Satz von Schottky und Folgerungen 235

10.3.1 Beweis des Schottkyschen Satzes 236

10.3.2 Landaus Verschärfung des kleinen Picardschen Satzes . . 237

10.3.3 Verschärfung der Sätze von Montel und Vitali 237

10.4	Großer Satz von Picard	239
10.4.1	Beweis des großen Picardschen Satzes	239
10.4.2	Historisches zu den Sätzen dieses Kapitels	239
11	Randverhalten von Potenzreihen	241
11.1	Konvergenz auf dem Rand	241
11.1.1	Sätze von Fatou, M. Riesz und Ostrowski	242
11.1.2	Ein Lemma von M. Riesz	243
11.1.3	Beweis der Sätze aus 11.1.1	244
11.1.4	Ein Kriterium für Nichtfortsetzbarkeit	246
11.2	Theorie der Überkonvergenz. Lückensatz	247
11.2.1	Überkonvergente Potenzreihen	247
11.2.2	Überkonvergenzsatz von Ostrowski	248
11.2.3	Lückensatz von Hadamard	249
11.2.4	Porters Konstruktion überkonvergenter Reihen	250
11.2.5	Historisches zum Lückensatz	251
11.2.6	Historisches zur Überkonvergenz	252
11.2.7	Ausblicke	253
11.3	Ein Satz von Fatou-Hurwitz-Pólya	254
11.3.1	Der Hurwitzsche Beweis	254
11.3.2	Ausblicke	255
11.4	Ein Fortsetzungssatz von Szegő	256
11.4.1	Vorbereitungen zum Beweis von (Sz)	257
11.4.2	Beweis von (Sz)	259
11.4.3	Eine Anwendung	260
11.4.4	Ausblicke	261
12	Runge-Theorie für Kompakta	263
12.1	Hilfsmittel	264
12.1.1	Cauchysche Integralformel für Kompakta	264
12.1.2	Approximation durch rationale Funktionen	266
12.1.3	Polstellenverschiebungssatz	268
12.2	Runge-Theorie für Kompakta	269
12.2.1	Approximationssätze von Runge	269
12.2.2	Folgerungen aus dem kleinen Satz von Runge	271
12.2.3	Hauptsatz der Runge-Theorie für Kompakta	272
12.3	Anwendungen des kleinen Satzes von Runge	274
12.3.1	Punktweise konvergente Polynomfolgen, die nicht überall kompakt konvergieren	274
12.3.2	Holomorphe Einbettung des Einheitskreises in den \mathbb{C}^3	277
12.4	Diskussion der Cauchyschen Integralformel für Kompakta	279
12.4.1	Finale Form von Satz 12.4	280
12.4.2	Umlaufungssatz	281

13	Runge-Theorie für Bereiche	285
13.1	Die Rungeschen Sätze für Bereiche	286
13.1.1	Auffüllung von Kompakta. Runges Beweis des Satzes von Mittag-Leffler	286
13.1.2	Approximationssätze von Runge	288
13.1.3	Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie	288
13.1.4	Zur Theorie der Löcher	289
13.1.5	Historisches zur Runge-Theorie	290
13.2	Rungesche Paare	291
13.2.1	Topologische Charakterisierung Rungescher Paare	291
13.2.2	Rungesche Hüllen	293
13.2.3	Homologische Charakterisierung Rungescher Hüllen. Satz von Behnke-Stein	293
13.2.4	Rungesche Bereiche	294
13.2.5	Approximation und holomorphe Fortsetzbarkeit	295
13.3	Holomorph-konvexe Hüllen und Rungesche Paare	296
13.3.1	Eigenschaften des Hüllenoperators	296
13.3.2	Charakterisierung Rungescher Paare mittels holomorph-konvexer Hüllen	298
13.4	Anhang: Komponenten lokal kompakter Räume. Satz von Šura-Bura	299
13.4.1	Komponenten	299
13.4.2	Existenz offener Kompakta	300
13.4.3	Auffüllungen	300
13.4.4	Beweis des Satzes von ŠURA-BURA	301
14	Invarianz der Löcherzahl	303
14.1	Homologietheorie. Trennungslemma	303
14.1.1	Homologiegruppen. Betti-Zahl	303
14.1.2	Induzierte Homomorphismen. Natürliche Eigenschaften	305
14.1.3	Trennung von Löchern durch geschlossene Wege	306
14.2	Invarianz der Löcherzahl. Produktsatz für Einheiten	307
14.2.1	Zur Struktur der Homologiegruppe	307
14.2.2	Löcherzahl und Betti-Zahl	308
14.2.3	Normalformen mehrfach zusammenhängender Gebiete ..	310
14.2.4	Zur Struktur der multiplikativen Gruppe $\mathcal{O}(G)^\times$	310
14.2.5	Produktsatz für Einheiten	311
14.2.6	Ausblicke	312
15	Schlichte Funktionen. Bieberbachsche Vermutung	313
15.1	Schlichte Funktionen	314
15.1.1	Die Koebe-Funktion	315
15.1.2	Elementare Eigenschaften	315
15.1.3	Die Klassen Σ und Σ'	317

15.1.4	Der Satz von Bieberbach und die Bieberbachsche Vermutung	319
15.1.5	Die Milin-Vermutung	320
15.1.6	Weitere Anwendungen	323
15.2	Löwner-Theorie	327
15.2.1	Normalität und Abgeschlossenheit der Familie S	327
15.2.2	Der Carathéodorysche Konvergenzsatz	328
15.2.3	Dichte Teilfamilien von S	330
15.2.4	Löwner-Theorie	332
15.3	Beweis der Bieberbachschen Vermutung	338
15.3.1	Ansatz	338
15.3.2	Konstruktion der erzeugenden Funktionen $g_n(t)$	339
15.3.3	Beweis von $\Lambda_k^n(t) \geq 0$	343
15.4	Historisches zur Bieberbach-Vermutung	346
16	Kurzbiographien	351
	Literaturverzeichnis	357
	Symbolverzeichnis	370
	Namensverzeichnis	371
	Sachverzeichnis	375