

# Inhaltsverzeichnis

<b>§ 1. Metrische Räume. Topologische Grundbegriffe</b> .....	1
1.1 Der $n$ -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ .....	6
1.2 Konvergenz. Satz von Bolzano-Weierstraß .....	8
1.3 Die Regeln von de Morgan .....	10
1.4 Äquivalenzrelation .....	10
1.5 Metrischer Raum .....	11
1.6 Konvergenz und Vollständigkeit .....	12
1.7 Normierter Raum und Banachraum .....	15
1.8 Die Maximumnorm .....	17
1.9 Innenproduktraum und Hilbertraum .....	19
1.10 Der Hilbertsche Folgenraum $l^2$ .....	20
1.11 Innerer Punkt, Randpunkt, Häufungspunkt .....	21
1.12 Offene und abgeschlossene Mengen .....	22
1.13 Satz über Inneres, Rand und abgeschlossene Hülle .....	23
1.14 Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle .....	24
1.15 Metrischer Teilraum .....	25
1.16 Kompakte Mengen .....	25
1.17 Abstand zwischen Mengen. Umgebungen von Mengen .....	26
1.18 Orthogonalität und Winkel im $\mathbb{R}^n$ .....	28
1.19 Unterräume und Ebenen im $\mathbb{R}^n$ .....	29
1.20 Gerade, Strecke, Polygonzug .....	30
1.21 Hyperebenen und Halbräume .....	31
1.22 Konvexe Mengen .....	32
1.23 Konvexe Funktionen .....	35
Aufgaben .....	35
<b>§ 2. Grenzwert und Stetigkeit</b> .....	39
2.1 Grenzwert und Stetigkeit .....	41
2.2 Schwankung einer Funktion. Limes superior und Limes inferior ..	45
2.3 Stetigkeitsmodul .....	46
2.4 Komposition stetiger Funktionen .....	46
2.5 Stetige vektor- und skalarwertige Funktionen .....	47
2.6 Polynome in mehreren Veränderlichen .....	48
2.7 Stetigkeit bezüglich einzelner Veränderlichen .....	48
2.8 Lineare Abbildungen .....	49
2.9 Stetigkeit und Kompaktheit .....	51

2.10	Extremwerte bezüglich einzelner Variablen .....	52
2.11	Satz über die gleichmäßige Stetigkeit .....	53
2.12	Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion .....	54
2.13	Das Halbierungsverfahren .....	54
2.14	Offene Überdeckungen kompakter Mengen .....	57
2.15	Gleichmäßige Konvergenz .....	58
2.16	Satz von Dini .....	59
2.17	Weierstraßsches Majorantenkriterium .....	59
2.18	Potenzreihen in mehreren Veränderlichen .....	59
2.19	Fortsetzung stetiger Funktionen. Satz von Tietze .....	61
2.20	Landau-Symbole .....	64
	Aufgaben .....	65
<b>§ 3.</b>	<b>Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen .....</b>	<b>68</b>
3.1	Partielle Ableitungen. Gradient .....	70
3.2	Graphische Darstellung einer Funktion. Höhenlinien .....	72
3.3	Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation .....	75
3.4	Der allgemeine Fall .....	76
3.5	Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante .....	78
3.6	Höhere Ableitungen. Die Klassen $C^k$ .....	79
3.7	Lineare Differentialoperatoren .....	80
3.8	Differenzierbarkeit und vollständiges Differential .....	81
3.9	Satz über Stetigkeit .....	83
3.10	Die Kettenregel .....	85
3.11	Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung .....	87
3.12	Richtungsableitungen .....	89
3.13	Der Satz von Taylor .....	90
3.14	Das Taylorpolynom .....	93
3.15	Die Taylorsche Reihe .....	94
3.16	Fläche und Tangentialhyperebene .....	96
3.17	Die Hessematrix .....	99
3.18	Differentiation im Komplexen. Holomorphie .....	100
3.19	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen .....	101
3.20	Bewegung, winkeltreue und konforme Abbildung .....	102
	Aufgaben .....	103
<b>§ 4.</b>	<b>Implizite Funktionen. Maxima und Minima .....</b>	<b>106</b>
4.1	Fixpunkte kontrahierender Abbildungen. Kontraktionsprinzip .....	106
4.2	Einige Hilfsmittel. Lipschitzbedingung im $\mathbb{R}^n$ .....	109
4.3	Das Newton-Verfahren .....	111
4.4	Implizite Funktionen .....	111
4.5	Satz über implizite Funktionen .....	114
4.6	Umkehrabbildungen. Diffeomorphismen .....	118
4.7	Offene Abbildungen .....	121
4.8	Quadratische Formen .....	122
4.9	Maxima und Minima .....	124

4.10	Das Fermatsche Kriterium für lokale Extrema .....	124
4.11	Hinreichende Bedingung für ein Extremum .....	125
4.12	Extrema mit Nebenbedingungen .....	128
4.13	Lagrangesche Multiplikatorenregel .....	130
4.14	Corollar (Lagrangesche Multiplikatorenregel) .....	131
4.15	Lokale Klassifikation von glatten Funktionen .....	133
4.16	Lemma von Marston Morse .....	135
	Aufgaben .....	138
<b>§ 5.</b>	<b>Allgemeine Limestheorie. Wege und Kurven</b> .....	<b>142</b>
5.1	Gerichtete Menge und Netz .....	142
5.2	Der Grenzwert eines Netzes .....	143
5.3	Konvergenzkriterium von Cauchy .....	145
5.4	Reellwertige Netze .....	145
5.5	Monotone Netze .....	146
5.6	Das Riemann-Integral als Netzlimes .....	146
5.7	Netzlimes für Teilintervalle .....	147
5.8	Konfinale Teilfolgen .....	148
5.9	Metrische Ordnung und Riemannsches Summendefinition des Integrals .....	149
	<b>Wege und Kurven</b> .....	<b>151</b>
5.10	Weg und Kurve .....	153
5.11	Die Weglänge .....	160
5.12	Die Weglänge als Funktion von $t$ .....	161
5.13	Äquivalente Darstellungen, Orientierung .....	163
5.14	Die Länge einer Kurve .....	164
5.15	Die Bogenlänge als Parameter .....	168
5.16	Tangente und Normalenebene .....	169
5.17	Ebene Kurven, positive Normalen .....	170
5.18	Krümmung und Krümmungsradius .....	171
5.19	Ebene Kurven .....	174
5.20	Funktionen von beschränkter Variation .....	175
5.21	Darstellungssatz von C. Jordan .....	177
5.22	Satz über Rektifizierbarkeit .....	177
	<b>Anwendung: Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung</b> .....	<b>178</b>
5.23	Die Bewegungsgleichungen .....	178
5.24	Die Lösung des Zweikörperproblems .....	179
5.25	Satz über das Zweikörperproblem .....	182
5.26	Eindeutigkeitssatz .....	184
5.27	Historisches zu den Keplerschen Gesetzen .....	184
	Aufgaben .....	186
<b>§ 6.</b>	<b>Das Riemann-Stieltjes-Integral. Kurven- und Wegintegrale</b> .....	<b>190</b>
6.1	Das Riemann-Stieltjes-Integral .....	191
6.2	Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals .....	192
6.3	Partielle Integration .....	193

6.4	Transformation in ein Riemann-Integral .....	194
6.5	Weitere Beispiele .....	194
6.6	Bemerkungen .....	195
6.7	Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale .....	197
6.8	Zweiter Mittelwertsatz für Riemannsche Integrale .....	197
6.9	Kurvenintegrale bezüglich der Bogenlänge .....	198
6.10	Eigenschaften von Kurvenintegralen .....	199
6.11	Anwendungen: Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment .....	199
6.12	Wegintegrale .....	201
6.13	Eigenschaften und Rechenregeln für Wegintegrale .....	202
6.14	Vektorfelder .....	203
6.15	Bewegung in einem Kraftfeld .....	204
6.16	Gradientenfelder. Stammfunktion und Potential .....	206
6.17	Die Integrabilitätsbedingung .....	208
6.18	Nochmals Kraftfelder .....	212
6.19	Komplexe Wegintegrale .....	213
6.20	Integralsatz von Cauchy .....	214
6.21	Satz über Stammfunktionen .....	215
	Aufgaben .....	216
<b>§ 7.</b>	<b>Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral im <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	<b>218</b>
7.1	Anforderungen an den Inhaltsbegriff .....	219
7.2	Zerlegungen eines Intervalls .....	220
7.3	Intervallsummen .....	222
7.4	Äußerer und innerer Inhalt. Jordan-Inhalt .....	223
7.5	Würfelsummen .....	225
7.6	Quadrierbare Mengen. Satz .....	226
7.7	Produktmengen, Produktregel .....	227
7.8	Abbildungen von Mengen .....	228
7.9	Lineare Abbildungen .....	229
	<b>Das Riemann-Integral im <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	<b>231</b>
7.10	Definition und einfache Eigenschaften des Integrals .....	232
7.11	Satz über gliedweise Integration .....	237
7.12	Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral .....	238
7.13	Die Riemannsche Summendefinition des Integrals .....	239
7.14	Parameterabhängige Integrale .....	241
7.15	Iterierte Integrale. Der Satz von Fubini .....	243
7.16	Das Cavalierische Prinzip .....	245
7.17	Die Abbildung von Gebieten. Das Lemma von Sard .....	246
7.18	Transformation von Integralen. Die Substitutionsregel .....	247
7.19	Beispiele. 1. Ebene Polarkoordinaten. 2. Zylinderkoordinaten .....	250
	3. Kugelkoordinaten. 4. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ .....	252
7.20	Uneigentliche Integrale .....	255
7.21	Beispiele. Die Eulersche Betafunktion .....	256
7.22	Die Faltung .....	258

7.23	Approximation durch $C^\infty$ -Funktionen. Mittelwerte .....	261
7.24	Der Weierstraßsche Approximationssatz .....	263
7.25	Masse und Schwerpunkt .....	265
7.26	Potential einer Massenbelegung .....	266
7.27	Rotationssymmetrische Massenbelegungen .....	268
	Aufgaben .....	273
<b>§ 8.</b>	<b>Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes .....</b>	<b>277</b>
8.1	Gaußscher Integralsatz in der Ebene .....	278
8.2	Vektorprodukt und Parallelogrammfläche .....	281
8.3	Flächen im $\mathbb{R}^3$ .....	283
8.4	Der Inhalt einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ .....	286
8.5	Oberflächenintegrale .....	289
8.6	Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ .....	291
8.7	Physikalische Bedeutung des Gaußschen Satzes. Geschwindigkeitsfelder .....	294
	Wärmeleitung .....	295
8.8	Gramsche Matrizen und Determinanten .....	296
8.9	Der Inhalt von $m$ -dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$ .....	297
8.10	Der Fall $m = n - 1$ .....	299
8.11	Die Rotation eines Vektorfeldes .....	301
8.12	Der Satz von Stokes .....	301
	Aufgaben .....	305
<b>§ 9.</b>	<b>Das Lebesgue-Integral .....</b>	<b>308</b>
9.1	Mathematische Vorbereitung. Das Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$ .....	311
9.2	Intervalle. Darstellung von offenen Mengen .....	313
9.3	Mengen. Algebren und $\sigma$ -Algebren .....	314
9.4	Das äußere Lebesgue-Maß .....	315
9.5	Das Lebesguesche Maß. Hauptsatz .....	317
9.6	Offene Mengen und $G_\delta$ -Mengen .....	320
9.7	Das Lebesguesche Integral im $\mathbb{R}^n$ .....	321
9.8	Nichtnegative Funktionen .....	325
9.9	Meßbare Funktionen .....	326
9.10	Treppenfunktionen und Elementarfunktionen .....	327
9.11	Meßbarkeit und Integrierbarkeit .....	329
9.12	Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{C}$ .....	330
9.13	Satz von Beppo Levi .....	331
9.14	Satz von der majorisierten Konvergenz .....	332
9.15	Lemma von Fatou .....	333
9.16	Das Prinzip von Cavalieri .....	333
9.17	Die Produktformel .....	334
9.18	Satz von Fubini .....	335
9.19	Die Substitutionsregel .....	336
9.20	Die $L^p$ -Räume. Höldersche und Minkowskische Ungleichung ....	337
9.21	Dichtesatz .....	340

<b>Das Lebesgue-Integral in <math>\mathbb{R}</math></b> .....	341
9.22 Absolutstetige Funktionen .....	341
9.23 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	342
9.24 Überdeckungssatz von Vitali .....	342
9.25 Satz über das Maß der Bildmenge .....	344
9.26 Satz über Differenzierbarkeit monotoner Funktionen .....	344
9.27 Satz über das Integral der Ableitung .....	345
9.28 Abschluß des Beweises .....	346
9.29 Satz über Absolutstetigkeit .....	347
9.30 Partielle Integration .....	348
9.31 Die Substitutionsregel für $n = 1$ .....	348
9.32 Ausblicke: 1. Integration in abstrakten Maßräumen. 2. Das Lebesgue-Stieltjes-Maß .....	348
3. Der Fall $n = 1$ . 4. Integration im Banachraum. Das Bochner-Integral .....	349
Aufgaben .....	349
<b>§ 10. Fourierreihen</b> .....	354
10.1 Trigonometrische Reihe und Fourierreihe. Rechenregeln .....	358
10.2 Satz von Riemann-Lebesgue .....	361
10.3 Satz .....	361
10.4 Konvergenzsatz .....	362
10.5 Konvergenzsatz für Sprungstellen .....	363
10.6 Gerade und ungerade Fortsetzung .....	364
10.7 Umrechnung auf andere Periodenlängen .....	364
10.8 Riemannscher Lokalisationssatz .....	365
10.9 Gleichmäßige Konvergenz .....	365
<b>Die Hilbertraumtheorie der Fourierreihen</b> .....	366
10.10 Orthonormalfolgen im Hilbertraum .....	366
10.11 Fourierreihen bezüglich einer Orthonormalfolge .....	367
10.12 Konvergenzsatz .....	368
10.13 Vollständigkeit einer Orthonormalfolge .....	368
10.14 Der Hilbertraum $L^2_\pi$ .....	369
10.15 Satz über Konvergenz im quadratischen Mittel .....	370
10.16 Nochmals Absolutkonvergenz .....	371
Aufgaben .....	372
<b>Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben</b> .....	374
<b>Literatur</b> .....	395
<b>Bezeichnungen</b> .....	396
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	398