

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	V
<b>I Grundlagen</b> .....	1
1 Reelle Zahlen .....	1
1.1 Warum Analysis für Informatiker? .....	1
1.2 Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen ...	4
1.3 Einige nützliche Bezeichnungen .....	6
1.4 Rechenregeln für Suprema .....	7
1.5 Archimedizität der reellen Zahlen .....	8
1.6 Dichtheit der rationalen Zahlen .....	8
1.7 Dezimalzahldarstellung .....	9
1.8 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen .....	11
1.9 Algebraische und transzendente Zahlen .....	12
1.10 Berechenbare Zahlen .....	13
2 Ungleichungen: Ein Primer .....	15
2.1 Elementare Ungleichungen .....	15
2.2 Cauchy–Schwarz’sche Ungleichung .....	16
2.3 Euklidische Norm .....	17
Aufgaben .....	19
<b>II Grenzwerte</b> .....	21
3 Folgen .....	21
3.1 Konvergenz von Folgen .....	21
3.2 Beschränktheit konvergenter Folgen .....	23
3.3 Stetigkeit: Rechnen mit Grenzwerten .....	23
3.4 Monotone Folgen .....	25
3.5 Beschränkte Folgen .....	29
3.6 Exponentialfunktion .....	32
3.7 Allgemeine AM-GM-Ungleichung .....	35

VIII Inhaltsverzeichnis

3.8	Harmonische Zahlen	36
4	Reihen	39
4.1	Konvergenz von Reihen	39
4.2	Vergleichskriterien	40
4.3	Alternierende Reihen	42
4.4	Konvergenzbeschleunigung	44
4.5	Umordnung	45
5	Konsequenzen der Stetigkeit	48
5.1	Zwischenwertsatz	48
5.2	Existenz von Maximum und Minimum	50
5.3	Anwendung: Fundamentalsatz der Algebra	51
	Aufgaben	54
<b>III</b>	<b>Differentiation</b>	57
6	Die Ableitung einer Funktion	57
6.1	Begriff der Ableitung	57
6.2	Kalkül der Ableitungsregeln	61
6.3	Höhere Ableitungen und der Satz von Schwarz	65
6.4	Differentiation von Reihen	67
6.5	Trigonometrische Funktionen	69
7	Anwendungen der Ableitung	73
7.1	Kurvendiskussion und Mittelwertsatz	73
7.2	Berechnung von Grenzwerten	78
7.3	Konvexität und die Jensen'sche Ungleichung	81
	Aufgaben	85
<b>IV</b>	<b>Integration</b>	87
8	Das Integral einer Funktion	87
8.1	Begriff des bestimmten Integrals	87
8.2	Stammfunktionen und der Hauptsatz	92
8.3	Computergestützte symbolische Integration	95
8.4	Vertauschung von Integration und Grenzwerten	103
9	Anwendungen des Integrals	108
9.1	Ungleichungen	108
9.2	Abschätzungen von Summen und Reihen	109
9.3	Produktdarstellung der Sinusfunktion	113
	Aufgaben	117
<b>V</b>	<b>Potenzreihen</b>	121
10	Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen	121
10.1	Die Taylor'sche Formel	121
10.2	Potenzreihen im Komplexen	127
10.3	Kalkül der Potenzreihen	129

10.4	Die Bernoulli'schen Zahlen .....	132
11	Erzeugende Funktionen von Zahlenfolgen .....	136
11.1	Beispiel 1: Das Geldwechselproblem .....	136
11.2	Beispiel 2: Alternierende Permutationen .....	139
	Aufgaben .....	143
<b>VI</b>	<b>Differentialgleichungen .....</b>	<b>147</b>
12	Anfangswertprobleme .....	148
12.1	Erste Beispiele: Zurückführung auf Integrale .....	148
12.2	Existenz und Eindeutigkeit .....	151
12.3	Gleichungen höherer Ordnung .....	154
12.4	Computergestützte Lösung: numerisch/symbolisch ..	158
13	Anwendungen von Differentialgleichungen .....	162
13.1	Koeffizientenabschätzung für „arme Leute“ .....	162
13.2	Funktionalgleichungen .....	166
	Aufgaben .....	169
<b>VII</b>	<b>Asymptotik .....</b>	<b>171</b>
14	Zwei asymptotische Tricks .....	172
14.1	Bootstrapping .....	172
14.2	Trading Tails .....	176
15	Euler–Maclaurin'sche Summenformel .....	182
15.1	Der Operator kalkül von Lagrange .....	182
15.2	Die Summenformel mit Restglied .....	186
15.3	Strategien zur Anwendung der Summenformel .....	188
15.4	Harmonische Zahlen und die Euler'sche Konstante ...	189
15.5	Die Stirling'sche Formel .....	192
	Aufgaben .....	195
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>197</b>
	<b>Stichwortverzeichnis .....</b>	<b>199</b>