

# Wärmelehre

## § 12 Grundbegriffe – Temperaturskalen – Temperaturmessung

### § 12.1 Grundbegriffe

Mithilfe unseres Wärmesinns nehmen wir Wärme und Kälte wahr. Dieser subjektiven Empfindung liegt eine von der Masse und der stofflichen Zusammensetzung der Körper unabhängige *Zustandsgröße*, die **Temperatur**, zugrunde. Die Temperatur ist eine *skalare Größe* und beschreibt den Wärmezustand eines Systems. Soll die Temperatur geändert werden, so muss dem System *Wärme*, d. h. *Energie*, zugeführt oder entzogen werden. Die dabei benötigte oder freigesetzte **Wärmemenge**  $\Delta Q$  hängt von der Masse  $m$ , der stofflichen Zusammensetzung des Systems und der Größe der Temperaturänderung  $\Delta \vartheta$  ab:  $\Delta Q \sim m \cdot \Delta \vartheta$  (s. § 15.1).

Bringt man zwei Körper, die anfangs verschiedene Temperatur besitzen, genügend lange in innige Berührung, so nehmen sie dieselbe Temperatur an. Der anfangs „wärmere“ Körper kühlt sich ab und der „kältere“ Körper erwärmt sich; beide Körper sind dann im *thermischen Gleichgewicht* oder *Wärmegleichgewicht*.

### § 12.2 Temperaturskalen

Die *SI-Einheit der Temperatur* ist das **Kelvin (K)**. Daneben ist als Temperatureinheit auch der **Grad Celsius (°C)** zugelassen. Noch ge-

bräuchlich, vor allem in angelsächsischen Ländern, ist der **Grad Fahrenheit (°F)**.

Wir bezeichnen die Temperaturen, die in Kelvin gemessen werden, mit  $T$ . Bei allen anderen Temperatureinheiten wird für die Temperatur der griechische Buchstabe  $\vartheta$  verwendet.

Die **Kelvinskala** wird auch als *absolute thermodynamische Temperaturskala* bezeichnet. Den Beginn der Kelvinskala (s. Abb. 12.1) bildet der *absolute Nullpunkt*: 0 K. Fixpunkt der thermodynamischen Skala ist der *Tripelpunkt des Wassers*: 273,16 K (s. dazu § 16.3). Die Einheit 1 K ist definiert (s. § 2.1) als das  $(1/273,16)$ fache der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Die **Celsiuskala** hat zwei Fixpunkte. Als Nullpunkt, 0 °C, die Temperatur, bei der sich

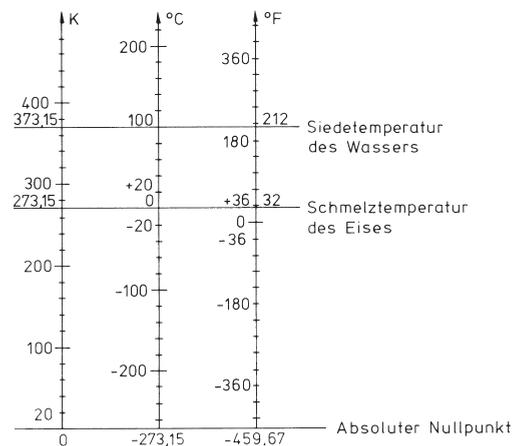


Abb. 12.1

*Eis und Wasser im Gleichgewicht* befinden (Schmelzpunkt des Eises), und den Wert  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , den *Siedepunkt des Wassers*, jeweils bei Normaldruck ( $= 1013,25\text{ hPa}$ ). Dieser Abstand ist in 100 gleiche Teile geteilt und ein Teil entspricht einem Grad Celsius ( $^\circ\text{C}$ ). Celsiuskala und Kelvinskala haben die gleiche Teilung (s. Abb. 12.1). Temperaturdifferenzen sollten zwar in K, können aber als Celsius-Temperaturdifferenzen auch in  $^\circ\text{C}$  angegeben werden.

Der absolute Nullpunkt,  $0\text{ K}$ , entspricht  $-273,15\text{ }^\circ\text{C}$ . Der Tripelpunkt des Wassers,  $273,16\text{ K}$ , liegt um  $0,01\text{ K}$  höher als der Schmelzpunkt von Eis bei Normaldruck.

Ist  $T$  die Temperatur gemessen in K und  $\vartheta$  die Temperatur gemessen in  $^\circ\text{C}$ , dann gilt für die absolute Temperatur:

$$T/\text{K} = \vartheta/^\circ\text{C} + 273,15 \quad (12.1)$$

Die **Fahrenheitskala** setzt  $32\text{ }^\circ\text{F}$  als die Temperatur *des schmelzenden Eises* fest (s. Abb. 12.1), während die *Siedetemperatur des Wassers*  $212\text{ }^\circ\text{F}$  entspricht. Die Einteilung ist also derart, dass auf 5 Celsiusgrade  $\vartheta_{\text{C}}$  9 Fahrenheitgrade  $\vartheta_{\text{F}}$  entfallen:

$$\vartheta_{\text{F}}/^\circ\text{F} = \frac{9}{5} \vartheta_{\text{C}}/^\circ\text{C} + 32 \quad (12.2)$$

So entsprechen z. B.  $37\text{ }^\circ\text{C}$ , die Körpertemperatur des Menschen,  $98,6\text{ }^\circ\text{F}$ .

### § 12.3 Temperaturmessung

Mit der Änderung der Temperatur ändern sich zahlreiche physikalische Eigenschaften von festen, flüssigen und gasförmigen Substanzen wie: Volumen, Dichte, Elastizität, Oberflächenspannung, Viskosität, elektrische Leitfähigkeit, thermoelektrischer Effekt usw. Die Änderung einiger dieser Eigenschaften macht man sich bei der Messung der Temperatur mit **Thermometern** zunutze.

#### Bimetallstreifen

Die meisten Festkörper dehnen sich bei Temperaturerhöhung aus (s. § 13.1). Insbesondere

eignen sich hier Metalle als Thermometer. Lötet, schweißt oder walzt man zwei (oder mehrere) Streifen aus Metallen, die bei gleicher Temperaturänderung sich unterschiedlich stark ausdehnen, aufeinander, so reagiert ein solcher **Bimetallstreifen** bei jeder Temperaturänderung mit einer Biegung. Zwei prinzipielle Ausführungsmöglichkeiten sind in Abb. 12.2 dargestellt. Bei Temperaturerhöhung, z. B., krümmt sich der Bimetallstreifen zur Seite des Materials, welches den geringeren thermischen Ausdehnungskoeffizienten (s. § 13.1) besitzt (Abb. 12.2 (1)). Durch schraubenförmige oder spiralförmige Anordnung des Bimetalls (Abb. 12.2 (2)) lassen sich diese Thermometer sehr klein gestalten. *Bimetallthermometer* besitzen keine hohe Genauigkeit (ca. 1 bis 2% des Skalenbereichs) und man verwendet sie oft nur zu Anzeigezwecken oder aber u. a., um in Kombination mit einem Schalter eine automatische Temperaturregelung herzustellen, wie z. B. das Öffnen und Schließen eines elektrischen Kontaktes bei einer bestimmten Temperatur.

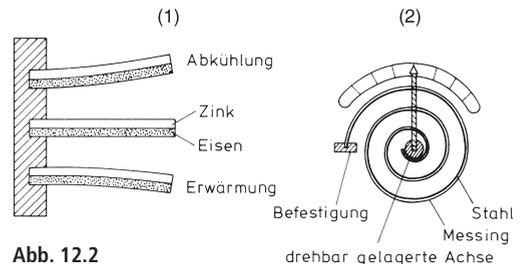


Abb. 12.2

Der Einsatzbereich von Bimetallthermometern liegt zwischen ca.  $-50\text{ }^\circ\text{C}$  und  $400\text{ }^\circ\text{C}$ , abhängig vom Metall. Beispiele von Kombinationen für Bimetallstreifen sind: Aluminium – Kupfer, Eisen – Zink und Messing – Stahl.

#### Flüssigkeitsthermometer

Die Ausdehnung von Flüssigkeiten (s. § 13.1) ist bei einer bestimmten Temperaturänderung erheblich größer als die von Festkörpern. Als Thermometerflüssigkeiten finden mit unterschiedlichen Einsatzbereichen zur Temperaturmessung häufig Verwendung:

*Quecksilber:*

von  $-39\text{ }^\circ\text{C}$  (Erstarrungstemperatur) bis  $\sim 300\text{ }^\circ\text{C}$  (Siedetemperatur  $356,7\text{ }^\circ\text{C}$ ).

**Quecksilber mit Gasfüllung** (Argon oder Stickstoff) im kapillaren Raum über dem Quecksilberfaden:

von  $-39\text{ }^{\circ}\text{C}$  bis ca.  $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Der Druck des Füllgases muss so gewählt werden, dass er größer ist als der Dampfdruck des Quecksilbers bei der höchsten zu messenden Temperatur.

**Alkohol oder Toluol:**

von etwa  $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$  bis  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**Pentan:**

von ca.  $-190\text{ }^{\circ}\text{C}$  bis  $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Bei allen diesen Thermometern befindet sich die Messflüssigkeit zum größten Teil in einem dünnwandigen Behälter von Kugel- oder Zylinderform aus Glas oder Quarz – dem eigentlichen Messfühler –, der in eine lange dünne Kapillare mündet (Abb. 12.3). An diese Kapillare ist eine Skala angebracht, deren Teilstrichabstand von der Messflüssigkeit, dem Messbereich und auch von der verwendeten Glasart abhängt, da ja das Messprinzip auf der relativ stärkeren Ausdehnung der Flüssigkeit im Vergleich zum umgebenden Glasbehälter beruht. Die Ablesegenauigkeit liegt je nach Skaleneinteilung zwischen 0,1 und 1 K.

Durch Verwendung von Kapillaren mit sehr kleinem Innenquerschnitt und hinreichend großen Quecksilbergefäßen erreicht man auch Ablesegenauigkeiten von 0,01 K, wobei solche hochempfindlichen Thermometer nur für einen eng begrenzten Temperaturbereich hergestellt werden, damit sie noch eine handliche Länge haben.



Abb. 12.3

## Fieberthermometer

Das klassische Fieberthermometer (Abb. 12.4) ist ein Maximumthermometer mit einer Quecksilberfüllung, das eine in Zehntelgrad geteilte Skala von  $35$  bis  $42\text{ }^{\circ}\text{C}$  besitzt.

Das Stehenbleiben des Quecksilberfadens in der Kapillare bei der Höchsttemperatur wird durch eine am unteren Ende der Kapillare angebrachte Verengung erreicht. An dieser Verengung werden die Kohäsionskräfte der Flüssigkeit stark abgeschwächt, demzufolge der Quecksilberfaden beim Absinken der Tempera-

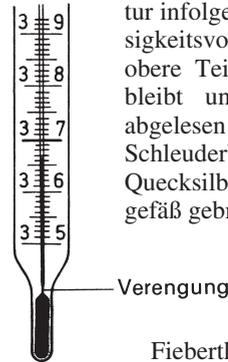


Abb. 12.4 Fieberthermometer mit Quecksilberfüllung dürfen jedoch in der Europäischen Union seit 2009 nicht mehr im Handel angeboten werden.

Als alternative Thermometerflüssigkeiten kommen neben Alkoholen überwiegend die seit 1996 verfügbare ungiftige Legierung **Galinstan** in Frage. Galinstan, ein Akronym aus **Gallium**, **Indium** und **Stannum** (Zinn), ist eine silberfarbige eutektische Legierung bestimmter Zusammensetzung aus diesen Elementen und bei Raum- bzw. Körpertemperatur flüssig. Da Galinstan an Glas haftet, müssen die Thermometerkapillaren auf ihrer Innenfläche mit entsprechend geeignetem Material (z. B. Galliumoxid) beschichtet werden. Die Funktionsweise und Handhabung dieser analogen Fieberthermometer mit Galinstan als Thermometerflüssigkeit, ist vergleichbar zu denen mit Quecksilberfüllung und sie können wegen ihres nahezu identischen Aussehens leicht mit diesen verwechselt werden.

Als Alternative zu diesen analogen Fieberthermometern sind jedoch auch elektronische Messtechniken zur Erfassung der Körpertemperatur weit verbreitet, üblicherweise mit digitaler Anzeige, wie beispielsweise die sog. **Digitalen Fieberthermometer** und die **Infrarot-Fieberthermometer**.

**Digitale Fieberthermometer**, wegen der digitalen Flüssigkristallanzeige (**Liquid Crystal Display**) oft auch als **LCD-Fieberthermometer** bezeichnet, nutzen als Messprinzip die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes aus (s. unten **Widerstandsthermometer**). Durch eine entsprechende elektronische Schaltung wird die temperaturabhängige Widerstandsänderung erfasst, bis in einem bestimmten Zeitintervall keine merkliche Änderung mehr stattfindet. Der dem erreichten elektrischen Widerstand äquivalente Temperaturwert entspricht dann der Maximaltemperatur.

**Infrarot-Fieberthermometer** messen berührungslos die von einem Körper emittierte Infrarotstrahlung

(Wärmestrahlung), die von seiner Oberflächentemperatur abhängt (s. § 17.3). Ein geeignetes optisches Linsensystem fokussiert die von der Körperoberfläche emittierte Strahlungsenergie auf einen Detektor, welcher ein der Strahlung äquivalentes elektrisches Signal erzeugt, das mittels einer digitalen Signalverarbeitung in ein der Körpertemperatur proportionales Ausgangssignal umgesetzt und über ein Display angezeigt wird. Als Detektoren werden thermische und pyroelektrische Sensoren verwendet (s. dazu auch den letzten Abschnitt dieses Paragraphen), wobei der Detektor auf das Emissionsvermögen des emittierenden Körpers kalibriert sein muss.

Nach diesem Messprinzip arbeiten die sog. *Ohr-Fieberthermometer*, welche zur Temperaturmessung im Ohr verwendet werden, sowie die berührungslos die Temperatur der Hautoberfläche (z.B. der Stirn) messenden *Infrarot-Fieberthermometer*. Beide Gerätetypen finden in den letzten Jahren zunehmend Verwendung in Arztpraxen, im klinischen und auch im privaten Bereich.

### Gasthermometer

Gase dehnen sich bei einer bestimmten Temperaturänderung noch wesentlich stärker aus (s. § 13.2) als Flüssigkeiten. Da sich Gase in hinreichender Verdünnung alle gleich verhalten, finden verdünnte Gase, insbesondere die idealen Gase, als sehr genaue Temperaturmessinstrumente in einem weiten Temperaturbereich Verwendung. Flüssigkeitsthermometer werden zu Eichzwecken mit Gasthermometern verglichen (s. § 13.2.2, Abb. 13.7), insbesondere solchen mit Wasserstoff- oder Heliumfüllung der Glas- oder Quarzbehälter. Verwendet man Platin bzw. Iridium als Gefäßmaterial und Helium als Füllgas, so erstreckt sich der Anwendungsbereich eines solchen Gasthermometers ab etwa 1 K bis 1900 bzw. 2300 K. Aufgrund der ca. 1000-mal so starken Ausdehnung der Gase im Vergleich zu den Gefäßmaterialien, kann man im Allgemeinen die Ausdehnung der Gefäße vernachlässigen bzw. kann der durch das Gefäß bedingte Fehler klein gehalten werden.

### Widerstandsthermometer

Der elektrische Widerstand von Metallen und Halbleitern ist von der Temperatur abhängig. Bei Metallen steigt der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur (s. § 25.1.1). Der Widerstand ist abhängig von der Art des Me-

talls und bei sehr tiefen Temperaturen von seiner Reinheit. Besonders geeignet als Material für Widerstandsthermometer ist das Platin, das im Temperaturbereich von ca.  $-250^{\circ}\text{C}$  bis etwa  $+1000^{\circ}\text{C}$  eingesetzt werden kann.

Im Gegensatz zu Metallen sinkt bei Halbleitermaterialien der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur (s. § 25.2.2). Da ihre Empfindlichkeit bei abnehmender Temperatur steigt, finden sie Anwendung zur Messung sehr tiefer Temperaturen, etwa zwischen 0,1 und 20 K, aber je nach Ausführung auch als Widerstandsthermometer für höhere Temperaturen im Bereich von ca.  $-55^{\circ}\text{C}$  bis  $+400^{\circ}\text{C}$ ; in speziellen Ausführungen auch bis  $+1000^{\circ}\text{C}$ . Als Materialien für Halbleiter-Temperaturfühler finden z. B. Massiv-Kohlewiderstände, Einkristalle aus Germanium oder Silizium und auch geeignet dotiertes Halbleitermaterial Verwendung.

Bei Metall- wie bei Halbleiter-Widerstandsthermometern wird die Temperaturmessung auf eine Messung des Widerstandes zurückgeführt (vgl. §§ 24 und 28) und es werden Genauigkeiten für die Temperaturbestimmung zwischen 0,1 und 1 K erreicht.

### Thermoelemente

Verbindet man zwei verschiedene Metalle durch Klemmen, Löten oder Schweißen, so treten an der Kontaktstelle Elektronen des einen Metalls zum anderen über, wodurch eine *Kontaktspannung* entsteht, die von der Temperatur der Kontaktstellen abhängig ist (siehe dazu auch § 25.1.3). Sind alle Kontaktstellen auf gleicher Temperatur, so kompensieren sich die Kontaktspannungen. Werden aber zwei Kontaktstellen auf verschiedener Temperatur gehalten, so bleibt die Differenz der Kontaktspannungen als Thermospannung übrig, die der Temperaturdifferenz  $\Delta T$  der beiden Kontaktstellen proportional ist. Damit ist die Temperaturmessung auf eine Spannungsmessung zurückgeführt.

Thermoelemente besitzen den Vorteil, Temperaturfühler mit sehr kleiner Berührungsfläche ( $\approx 0,1 \text{ mm } \varnothing$ ), geringer Wärmekapazität und damit geringer Trägheit der Anzeige zu sein. Die Spannungen liegen z. B. für ein Kupfer-Konstantan-Element bei etwa  $40 \mu\text{V/K}$  für Temperaturen zwischen  $-150^{\circ}\text{C}$  und  $+150^{\circ}\text{C}$ .

Der schematische Aufbau eines solchen Thermoelements ist in Abb. 12.5 wiedergegeben. Zur Temperaturmessung wird die Messstelle der zu messenden Temperatur ausgesetzt ( $T_2$  in Abb. 12.5) und die Vergleichsstelle auf einer bekannten und möglichst konstanten Temperatur  $T_1$  gehalten, z. B. mittels eines thermostatisierten Gefäßes oder wie in Abb. 12.5 dargestellt mit Eiswasser.

Für die am Voltmeter ablesbare Thermo- spannung gilt:

$$U_{\text{th}} = a \cdot \Delta T = a \cdot (T_2 - T_1) \quad (12.3)$$

Dabei ist  $a$  eine materialspezifische Konstante, häufig als „*Thermokraft*“ bezeichnet, die durch

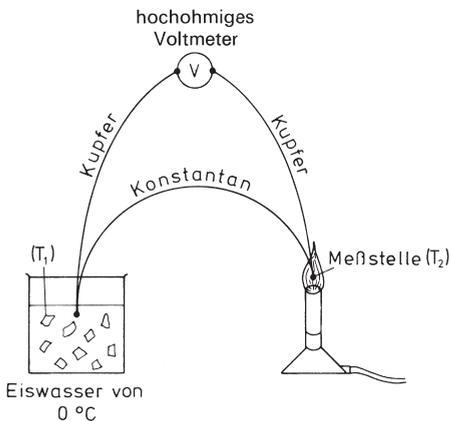


Abb. 12.5

Kalibration des Thermoelements experimentell bestimmt werden kann. Für ein Kupfer-Konstantan-Thermoelement ergibt sich z. B. der oben angegebene Wert  $a \approx 42,5 \mu\text{V/K}$ ; bei einem Eisen-Konstantan-Thermoelement ist  $a \approx 54 \mu\text{V/K}$  (jeweils im Temperaturintervall  $0^\circ\text{C}$  bis  $+150^\circ\text{C}$ ). Der von Thermoelementen in unterschiedlichen Paarungen von Werkstoffen (vgl. § 25.1.3) insgesamt überdeckte Temperaturbereich erstreckt sich von  $-270^\circ\text{C}$  bis etwa  $2500^\circ\text{C}$ .

### Beispiele weiterer Möglichkeiten der Temperaturmessung

Besonders präzise Messungen sind mit dem *Quarzkristallthermometer* möglich, wobei die Temperatur-

abhängigkeit der Schwingungsfrequenz (typischer Wert:  $1 \text{ kHz pro K}$ ) eines Quarzkristalls ausgenützt wird, im Vergleich zu einem Referenzkristall, der aufgrund eines anderen Herstellungsverfahrens nahezu temperaturunabhängig ist. Die Schwingquarze werden i. Allg. so hergestellt, dass sie bei  $0^\circ\text{C}$  mit einer Frequenz  $\nu \approx 28,2 \text{ MHz}$  schwingen. Gemessen wird die Differenzfrequenz von Mess- und Referenzquarz mit einem Frequenzzähler, bei einem Messfehler von maximal  $0,04 \text{ K}$ .

Berührungslose Temperaturmessmethoden beruhen auf der Erfassung der von einem Körper emittierten Strahlungsleistung, die mit der Temperatur des Körpers ansteigt (s. §§ 17.3 und 43). Die Messung der Strahlung erfolgt mit *Bolometern*, *Thermosäulen* und *Pyrometern* (mit unterschiedlichen Detektoren). Pyrometer werden überwiegend zur Messung hoher Temperaturen verwendet (Bereich: ca.  $1000$  bis  $3200^\circ\text{C}$ ), es gibt aber auch Pyrometer mit denen, bei geeignetem Detektor (z. B. Thermosäule), sich Temperaturen ab  $-40^\circ\text{C}$  messen lassen. Ein weiteres Verfahren der berührungslosen Temperaturmessung ist die *Thermographie*, bei welcher mit einer *Infrarotkamera* das Objekt mittels einer Rasteroptik zeilenförmig abgetastet wird und man so ein Temperaturverteilungsbild des Objektes erhält. Die Messmöglichkeiten reichen von  $-30^\circ\text{C}$  bis ca.  $1400^\circ\text{C}$ , bei einer Temporauflösung im niedrigsten Messbereich von etwa  $0,1 \text{ K}$ . Dieses Verfahren findet sowohl in der Technik als auch in der Medizin vielfältig Anwendung.

Es gibt auch eine Reihe spezieller berührender Temperaturmessverfahren auf nichtelektrischer Basis. Ein Beispiel hierzu sind bestimmte *Flüssigkristalle* (z. B. Cholesterinkristalle), die innerhalb eines engen Bereichs bei unterschiedlichen Temperaturen reversibel verschiedene Farben zwischen rot und blau annehmen (Anwendung z. B. in der Medizin bei der Plattenthermographie). Ebenso finden *Temperaturanzeigefolien* Verwendung, die bei Erreichen einer vorgegebenen Temperatur einen irreversiblen Farbumschlag zeigen, wie auch *Temperaturmessfarben* (Thermofarben oder -kreiden), die in Abhängigkeit von der Temperatur deutlich erkennbare Farbumschläge aufweisen.

In der Praxis benutzt man zur Kalibrierung von Thermometern in unterschiedlichen Temperaturbereichen eine Reihe von Fixpunkten, die durch Erstarrungs-, Siede- und Tripelpunkte verschiedener Stoffe international festgelegt sind. Einige dieser definierenden Fixpunkte der sog. „Internationalen Praktischen Temperaturskala“ (ITPS-68) sind in Tab. 12.1, bezogen auf einen Normdruck von  $1013,25 \text{ hPa}$ , angegeben.

Tab. 12.1

Fixpunkt	$T$ in K	$\vartheta$ in $^{\circ}\text{C}$
Tripelpunkt von Wasserstoff	13,81	-259,34
Siedepunkt von Wasserstoff	20,28	-252,87
Siedepunkt von Neon	27,102	-246,048
Tripelpunkt von Sauerstoff	54,361	-218,789
Siedepunkt von Sauerstoff	90,188	-182,962
Tripelpunkt von Wasser	273,16	0,01
Siedepunkt von Wasser	373,15	100
Erstarrungspunkt von Zink	692,73	419,58
Erstarrungspunkt von Silber	1235,08	961,93
Erstarrungspunkt von Gold	1337,58	1064,43

## Aufgaben

**Aufgabe 12.1:** Geben Sie die Fixpunkte

- der Kelvin-Skala,
- der Celsius-Skala an.

**Aufgabe 12.2:** Man gebe den Schmelzpunkt von Platin, 2045 K, in  $^{\circ}\text{C}$  an.

**Aufgabe 12.3:** Bei einem Thermometer sind infolge sehr ungenauer Eichung der Nullpunkt bei  $+1^{\circ}\text{C}$  und der Siedepunkt bei  $99^{\circ}\text{C}$  an der Skala aufgetragen.

- Wie groß ist die tatsächliche Temperatur, wenn an der Skala dieses Thermometers  $25^{\circ}\text{C}$  abgelesen werden?
- Welche Temperatur zeigt das Thermometer richtig an?

**Aufgabe 12.4:** Mit einem Widerstandsthermometer wird die Temperatur von Wasser am Tripelpunkt gemessen und man liest einen Widerstand von  $R = 90,35 \Omega$  ab. Welche Temperatur hat eine Flüssigkeit, in welcher mit diesem Thermometer ein Widerstand von  $96,28 \Omega$  gemessen wird? Im verwendeten Messbereich zeigt das Widerstandsthermometer einen linearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Widerstand. (Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$  des elektrischen Widerstandes des Thermometermaterials  $\alpha = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .)

**Aufgabe 12.5:** Die Bezugsstelle eines Thermoelementes wird zunächst auf konstanter Temperatur von 300 K gehalten und an der Messstelle liegt eine Temperatur von 374 K vor, sodass eine elektrische Spannung von ca. 4 mV am Messinstrument abgelesen werden kann. Welche Spannung tritt auf, wenn sich nun die Bezugsstelle auf  $20^{\circ}\text{C}$  und die Messstelle auf  $70^{\circ}\text{C}$  befindet?

## § 13 Einige thermische Eigenschaften von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der temperaturabhängigen Änderung von charakteristischen Größen, wie z. B. des Volumens und der Dichte kondensierter Materie oder des Volumens und des Drucks von Gasen. Bei der Beschreibung der Gase gehen wir zunächst von einer Idealisierung aus und stellen einfache mathematische Beziehungen zwischen den Größen Druck, Volumen und Temperatur des idealen Gases auf, um dann für ein reales Gas eine der möglichen Formulierungen einer Beziehung zwischen diesen Größen zu diskutieren.

### § 13.1 Thermische Ausdehnung von Festkörpern und Flüssigkeiten

Die Ausdehnung fester und flüssiger Stoffe haben wir bereits bei der Beschreibung der Möglichkeiten zur Temperaturmessung erwähnt. Diese Zusammenhänge sollen nun etwas genauer behandelt werden. Beginnen wir mit der thermischen Ausdehnung von Festkörpern, wobei wir erst einmal nur die Ausdehnung in einer der drei Raumrichtungen, d. h. die Längenausdehnung oder lineare Ausdehnung betrachten. Beispielsweise stellt ein Stab, dessen Länge groß gegenüber seiner Querschnittsfläche ist, eine gute Näherung dafür dar, aber auch eine in einer Kapillare eingeschlossene Flüssigkeitssäule.

#### § 13.1.1 Lineare Ausdehnung

Die lineare Ausdehnung von Stäben oder Rohren lässt sich mit einer einfachen Anordnung demonstrieren und messen, wie in Abb. 13.1 schematisch dargestellt: Ein Metallstab ist in der Halterung H fest eingespannt, in der Führung F frei gleitend gelagert und drückt gegen eine Zahnstange mit aufliegendem Zahnrad Z. Der am Zahnrad befestigte Zeiger erlaubt an der entsprechend geeichten Skala eine Verlän-

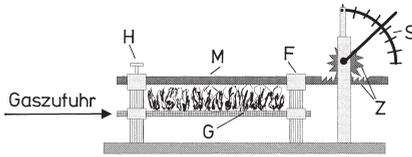


Abb. 13.1

gerung des Stabes abzulesen, die bei Erwärmung durch die aus zahlreichen Düsen austretenden Flammen des darunter angebrachten Gasrohrs G auftritt. Besitzt der Metallstab bei

Tab 13.1

Stoff	$\alpha$ in $10^{-6}/\text{K}$
Aluminium	23,86
Blei	29,4
Chrom	6,6
Diamant	1,3
Eis ( $-10\text{ }^{\circ}\text{C} \dots 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ )	50,7
Eisen	12,1
Germanium	6,1
Glas (Duran 50, Pyrex)	3,2
(Fenster)	10
(Quarz)	0,45
Glimmer	9...15
Gold	14,5
Granit	3...11
Hartgummi	75...100
Kalium	84
Kohlenstoff (Graphit)	7,9
Konstantan	15
Kupfer	16,7
Platin	8,8
Plexiglas	70...100
Polyamid (Nylon, Perlon)	70...140
Polyethylen	200...250
Porzellan	3...4
PVC	150...200
Silber	18,9
Silicium	7,6
Stahl (V-2A)	16
Teflon	60...100
Titan	8,35
Wolfram	4,5
Zink	26,3
Zirconium	5,7

der Ausgangstemperatur  $T_0$  die Länge  $l_0$ , dann gilt bei Ausdehnung in einer Dimension für die Länge  $l_T$  bei der Temperatur  $T = T_0 + \vartheta$ :

$$l_T = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta) \quad (13.1)$$

Der Metallstab erfährt somit bei einer Temperaturerhöhung  $\vartheta = \Delta T = T - T_0$  eine Längenänderung  $\Delta l = l_T - l_0 = l_0 \cdot \alpha \cdot \vartheta$ . Der *lineare Ausdehnungskoeffizient*  $\alpha$  ist gleich der mittleren relativen Längenänderung des Körpers im Temperaturintervall von  $T_0$  bis  $(T_0 + \vartheta)$  und gegeben durch:

*Definition:*

$$\alpha = \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{l_T - l_0}{l_0} = \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (13.2)$$

*Einheit:*

$$\text{K}^{-1}$$

Der lineare Ausdehnungskoeffizient ist über große Temperaturbereiche selbst von der Temperatur abhängig. Der mittlere lineare Ausdehnungskoeffizient einiger fester Stoffe (für den Bereich  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  bis  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , falls nicht anders vermerkt) ist in Tab. 13.1 angegeben.

### § 13.1.2 Volumenausdehnung

Festkörper dehnen sich nicht nur in Längsrichtung aus, sondern auch ihre Querschnittsfläche, d. h. in die beiden anderen Raumrichtungen erfahren sie ebenso eine Ausdehnung. Da Flüssigkeiten keine Gestaltelastizität besitzen, lässt sich bei ihnen nur eine Volumenänderung aufgrund einer Temperaturänderung angeben. Für die Volumenausdehnung von Festkörpern und Flüssigkeiten bei Temperaturerhöhung um  $\vartheta = \Delta T = T - T_0$  gilt daher allgemein:

$$V_T = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \vartheta) \quad (13.3)$$

$\gamma$ : Volumenausdehnungskoeffizient

$V_T$ : Volumen bei der Temperatur  $T = T_0 + \vartheta$

$V_0$ : Volumen bei der Temperatur  $T_0$

Es erfolgt somit bei einer Temperaturerhöhung  $\vartheta$  von  $T_0$  auf  $(T_0 + \vartheta)$  eine Volumenänderung

$\Delta V = V_T - V_0$  gegeben durch  $\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \vartheta$ , wobei der Volumenausdehnungskoeffizient  $\gamma$  gleich der mittleren relativen Volumenänderung des Körpers pro Kelvin ist:

Definition:

$$\gamma = \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{V_T - V_0}{V_0} = \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{\Delta V}{V_0} \quad (13.4)$$

Einheit:

$K^{-1}$

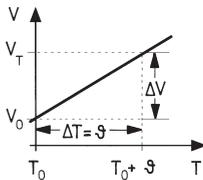


Abb. 13.2

In Abb. 13.2 ist der lineare Zusammenhang zwischen Körpervolumen und Temperaturänderung nach Gleichung (13.3) dargestellt (beide Koordinatenachsen linear geteilt). Bei bekanntem Volumen  $V_0$  kann aus der Steigung der Geraden der Volumenausdehnungskoeffizient bestimmt werden.

### Festkörper

Bei *homogenen und isotropen Festkörpern* ist die relative Längenänderung  $\Delta l_i = l_{i,T} - l_{i,0}$  in alle drei Raumrichtungen ( $i = x, y, z$ ) dieselbe. Ist  $V_0 = l_{x,0} \cdot l_{y,0} \cdot l_{z,0}$  das Volumen des Festkörpers bei der Temperatur  $T_0$  und  $V_T = l_{x,T} \cdot l_{y,T} \cdot l_{z,T}$  bei der um  $\vartheta$  höheren Temperatur  $T = T_0 + \vartheta$  dann folgt mit (13.1) für  $V_T$ :

$$V_T = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)^3 \approx V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \vartheta) \quad (13.5)$$

wobei für  $\alpha \cdot \vartheta \ll 1$  Glieder mit höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Durch Vergleich mit der Beziehung (13.3) folgt aus (13.5) für den Volumenausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  des homogenen und isotropen Festkörpers:

$$\gamma = 3\alpha \quad (13.6)$$

Der kubische Ausdehnungskoeffizient von isotropen Festkörpern kann somit in erster Näherung aus dem linearen Ausdehnungskoeffizienten gemäß (13.6) berechnet werden. Für einen nicht-isotropen Festkörper stellt  $\alpha$  in (13.6) den Mittelwert  $\bar{\alpha} = \frac{1}{3}(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)$  der linearen Ausdehnungskoeffizienten in die jeweilige Raumrichtung dar.

### Flüssigkeiten

Die Volumenausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  von Flüssigkeiten sind erheblich (ca. 100fach) größer als jene der Festkörper, wie Tab. 13.2 für einige Flüssigkeiten (bei einer Temperatur von  $20^\circ\text{C}$ , falls nicht anders vermerkt) zeigt. Der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeiten variiert aber wesentlich stärker mit der Temperatur als der von Festkörpern. Das Volumen von Flüssigkeiten wächst daher nicht streng linear mit der Temperatur und Gleichung (13.3) ist allenfalls über ein kleines Temperaturintervall gültig. Der thermische Ausdehnungskoeffizient  $\gamma$  der Flüssigkeit kann demzufolge nur aus der Steigung der Messkurve  $V = f(T)$  für die entsprechende Temperatur ( $T_0 + \vartheta$ ) bestimmt werden. Bei Quecksilber ist  $\gamma$  über einen großen Temperaturbereich in erster Näherung von der Temperatur unabhängig, weshalb die Skalen von Quecksilber-Thermometern eine äquidistante Teilung aufweisen. Für eine beliebige Thermometerflüssigkeit wird die Teilung jedoch nichtäquidistant sein (z. B. Alkoholthermometer).

Als ein Beispiel für die Temperaturabhängigkeit sind in Tab. 13.2 einige Werte des thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  von Wasser bei verschiedenen Temperaturen mit aufgenommen, wobei Wasser überdies eine wichtige Ausnahmestellung einnimmt, indem es eine *Anomalie* zeigt: Wasser besitzt bei Erwärmung von  $0^\circ\text{C}$  bis zu einer Temperatur von  $3,98^\circ\text{C}$  einen negativen Ausdehnungskoeffizienten – d. h. es zieht sich bei Erwärmung zusammen –, bei  $3,98^\circ\text{C}$  ist der Nulldurchgang und erst oberhalb dieser Temperatur nimmt  $\gamma$  positive Werte an; die Dichte von Wasser ist bei dieser Temperatur daher maximal (s. § 13.1.3).

Tab. 13.2

Flüssigkeit	$\gamma$ in $10^{-4}/\text{K}$
Aceton	14,9
Benzin	10,6
Benzol	12,4
Chloroform	12,8
Diethylether	16,2
Ethanol	11,0
Glycerin	4,7
Glycol	6,4
Methanol	12,0
Olivöl	7,2
Quecksilber	1,82
Salpetersäure	12,4
Schwefelsäure	5,7
Silikonöl	9...16
Tetrachlorkohlenstoff	12,3
Toluol	11,1
Wasser:	
von 0 °C	-0,7
von 3,98 °C	0,0
von 10 °C	0,88
von 20 °C	2,07
von 30 °C	3,02
von 40 °C	3,85
von 50 °C	4,58
von 60 °C	5,23
von 70 °C	5,84
von 80 °C	6,43
von 90 °C	6,96

### § 13.1.3 Temperaturabhängigkeit der Dichte

Die Dichte eines Körpers ist definiert durch  $\varrho = \frac{m}{V}$ . Bei der Temperatur  $T = T_0 + \vartheta$  besitzt der Körper dann die Dichte:

$$\varrho_T = \frac{m}{V_T} = \frac{m}{V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \vartheta)} = \frac{m}{V_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma \cdot \vartheta}$$

oder

$$\varrho_T = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \cdot \vartheta} \quad (13.7)$$

$\varrho_0$ : Dichte des Körpers bei der Temperatur  $T_0$   
 $\gamma$ : Volumenausdehnungskoeffizient

Die Dichte von festen Körpern und von Flüssigkeiten nimmt in der Regel gemäß Gleichung (13.7) mit steigender Temperatur ab. Für kleine Temperaturänderungen  $\vartheta = \Delta T$  erhält man aus (13.7) für die Dichteänderung  $\Delta \varrho = \varrho_T - \varrho_0$ :

$$\Delta \varrho = -\gamma \cdot \varrho \cdot \vartheta \quad (13.8)$$

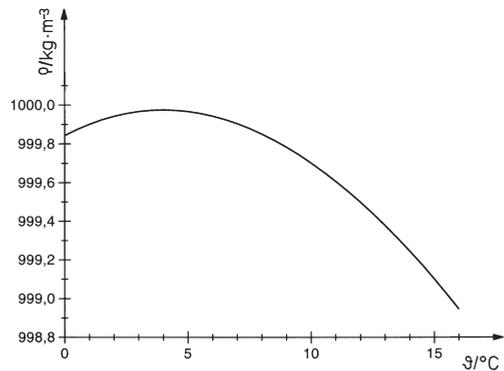


Abb. 13.3

Eine bemerkenswerte Abweichung von Gleichung (13.7) zeigt das Wasser, wie oben bereits erwähnt (*Anomalie des Wassers*). In Abb. 13.3 ist die Abhängigkeit der Dichte des Wassers bei Temperaturerhöhung von 0 °C bis 16 °C dargestellt. Reines Standard-Meerwasser, das frei von darin gelösten Salzen oder Gasen ist, besitzt bei einem Normdruck von 1013,25 hPa bei 4 °C (genauer bei 3,98 °C) ein Maximum der Dichte ( $\varrho_{\text{H}_2\text{O}} = 0,999975 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) und es gilt für die Dichte im Temperaturintervall von 0 °C bis 16 °C:

$$\varrho_{0^\circ\text{C}} < \varrho_{4^\circ\text{C}} > \varrho_{16^\circ\text{C}}$$

Für Temperaturen oberhalb und unterhalb von 4 °C ist die Dichte des Wassers stets kleiner. Stehende Gewässer gefrieren in kalten Wintern deshalb von der Wasseroberfläche her zu, während sie am Grund i. Allg. noch eine Temperatur von 4 °C aufweisen.